2.7 Programació lineal i dietes

Segons l'OMS, una dieta equilibrada ha de contenir un 15% de proteïnes, un 30% de greixos i un 55% de glúcids. Si a més sabem que diàriament hem de prendre com a mínim 80 g de proteïnes, tenim que una bona dieta ha de tenir almenys 80, 160, i 290 g de proteïnes, greixos i glúcids respectivament.

Amb les dades anteriors intentarem plantejar el problema de quina és la dieta més barata i equilibrada que podem fer menjant només llegums, galetes, alvocats i olives.[6] Tenim la següent taula de preus i composicions:

100 g	Proteïnes	Greixos	Glúcids	Preu de 100 g
Llegums	25	1	60	20
Galetes	11	9	72	30
Alvocats	2	26	6	60
Olives	1	20	10	25

Taula 2. Preu i composició de diversos aliments

A partir de la taula i anomenant x, y, z i t la quantitat (en unitats de 100 g) de llegums, galetes, alvocats i olives que té la dieta, tenim que la solució del problema següent:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & 20x + 30y + 60z + 25t, \\ \text{sabent que} & x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ t \geq 0, \\ & 25x + 11y + 2z + t \geq 80, \\ & x + 9y + 26z + 20t \geq 160, \\ & 60x + 72y + 6z + 10t \geq 290, \end{array}\right.$$

ens donarà la dieta més barata.

Si canviem la funció que volem minimitzar per la funció

$$60x + 72y + 6z + 10t,$$

ens donarà la dieta amb menys glúcids.

La solució de qualsevol d'aquests dos problemes de manera sistemàtica passa pel que s'anomena mètode del símplex per a resoldre problemes de programació lineal. Com a curiositat direm que la dieta més barata consisteix a menjar $250'3$, $90'4$, 0 i $746'8$ g de llegums, galetes, alvocats i olives, respectivament, cada dia. Una exposició detallada del mètode del símplex es pot trobar, per exemple, al llibre *Programación lineal,* de L. Peñafiel Millán, Biblioteca de Ciencias de la Administración, Ed. Trillas, 1976.

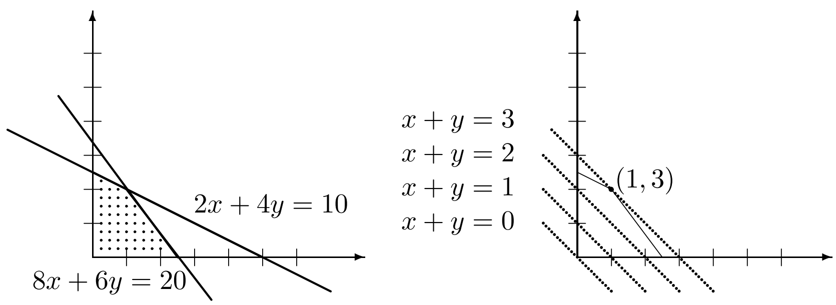
Seguidament explicarem un mètode mes senzill (anomenat mètode gràfic) que ens permetrà resoldre problemes com el d'abans en el cas de només dues variables. Per al cas de tres variables també es podria usar; però, com es deduirà de l'explicació següent, costaria més d'aplicar.

[6] De fet, el 1945, l'economista G. J Stiger ja va plantejar aquest tipus de problema. Va prendre 77 aliments diferents i va considerar nou elements nutritius (proteïnes, glúcids, vitamines, etc.). Finalment va deduir que era possible mantenir una dieta adequada i amb cost mínim, menjant només farina de blat, col de cabdell i faves seques.

Considerem el problema següent:

$$\begin{cases} \text{maximitzar} & x + y, \\ \text{sabent que} & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ & 8x + 6y \leq 20, \\ & 2x + 4y \leq 10. \end{cases}$$

Per tal de trobar el punt (x, y) que faci màxima la funció $x + y$ d'entre tots els punts que compleixen les quatre inequacions, el primer que es fa es dibuixar la regió del pla limitada per aquestes.



Un cop dibuixada la regió de punts (x, y) que compleix les inequacions (vegeu la figura de l'esquerra), observem com són les gràfiques de $x + y = k$ variant el valor de k. Com podeu veure a la figura de la dreta, aquestes són rectes paral·leles que van pujant al mateix temps que k augmenta. Aleshores, si les anem movent augmentant k, l'últim punt on toquin la regió puntejada serà el punt (x, y) en el qual k (i, per tant, la funció $x + y$) pren el valor més gran. En el nostre cas aquest punt és $(1, 2)$ i el valor màxim de $x + y$ serà 3.

La programació lineal també és útil per a resoldre el conegut com *problema del transport*. Explicarem aquest problema amb un exemple. Suposem que una empresa té tres factories F_1, F_2 i F_3 que produeixen q_1, q_2 i q_3 unitats d'un mateix producte, respectivament. Suposem, a més, que ha de repartir tot el que produeix entre quatre consumidors D_1, D_2, D_3 i D_4, que necessiten x_1, x_2, x_3 i x_4 unitats de producte, respectivament. Suposem que el cost d'enviar una unitat del producte, de la factoria i-èsima al consumidor j-èsim, és $p_{i,j}$. Com ho ha d'organitzar per tal de gastar el mínim possible?