Article preparat per Agustí Reventós per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 42–51).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

## 2.8 Probabilitats geomètriques. Geometria integral

### Mesura de punts. El problema de l'agulla de Buffon

L'origen de les probabilitats geomètriques es troba en l'anomenat *problema de l'agulla de Buffon*.

El comte de Buffon era un francès que es deia Georges Louis Leclerc, que va viure de 1707 a 1788 i va ser nomenat comte per Lluís XV. Va ser un gran naturalista i va escriure una *Història natural* de 36 volums. Va ingressar a l'Acadèmia de Ciències de París el 1734, com a cultivador de la mecànica racional.

L'any 1777, en el volum IV del *Suplement a la història natural* va incloure un treball titulat *Essai d'arithmétique morale*. En aquest article Buffon tracta d'adaptar la matemàtica a l'estudi de la realitat de l'home, procurant quantificar en la mesura del que sigui possible, les seves emocions, temors i esperances. Per a fer això necessita escollir una unitat de mesura de les emocions, a la qual poder referir quantitativament tota altra emoció. Agafa com a unitat el *temor a la mort*, que la pot considerar a la vegada mesura de temor i d'esperança sense més que canviar-la de signe.

En considerar les passions de l'home, Buffon assenyala la del joc com la més estesa i perniciosa. Es refereix als jocs d'atzar amb diners. Com coneix resultats de la teoria de probabilitats, que havia estat introduïda per J. Bernouilli el 1713, relaciona l'atzar amb els números i veu com aquests influeixen així en el comportament de les persones. Per això parla d'aritmètica moral.

Posteriorment reivindica la geometria com una eina eficaç en el càlcul de probabilitats. Diu:

> *L'anàlisi ha estat l'únic instrument que fins avui s'ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adient per a aquests fins, quan en realitat n'hi ha prou amb una mica d'atenció per observar que l'avantatge de l'anàlisi sobre la geometria és tan sols accidental, i que l'atzar és tan propi de la geometria com de l'anàlisi.*

També afegeix:

> *Per a posar la geometria en possessió dels seus drets sobre la ciència de l'atzar, n'hi haurà prou d'inventar jocs que es basin en l'extensió i en les seves relacions.*

A continuació introdueix el seu famós problema de l'agulla, que nosaltres presentarem d'una manera lleugerament diferent.

Suposem que dos amics, per exemple en Sergi i la Sílvia, fan l'aposta següent: tiraran el llapis a terra, sense mirar. Un cop el llapis estigui ben quiet miraran si talla les línies horitzontals que formen les rajoles en el terra d'una habitació.

Si talla, guanya el Sergi, i si no talla, guanya la Sílvia. Les rajoles són grans i quadrades, de 40 cm per 40 cm, i el llapis, gairebé nou, fa uns 15 cm Les preguntes són:

Q1. *Qui juga amb avantatge?*

Q2. *Quant hauria de mesurar el llapis per a què el joc fos equilibrat?*

Ara resoldrem matemàticament aquest problema i demostrarem que, en funció de la longitud del llapis i l'amplada de les rajoles, la probabilitat que el llapis talli les línies horitzontals determinades per les rajoles és

$$p = \frac{2l}{\pi a},$$

on $l$ és la longitud del llapis i $a$ l'amplada de les rajoles.

Per tant, en el nostre cas

$$p \simeq \frac{2 \cdot 15}{3.14 \cdot 40} = 0.23$$

que vol dir que, aproximadament, de cada 100 tirades 23 tallaran i 77 no tallaran. Per tant, la Sílvia té tots els trumfos! Això respon $Q1$.

La pregunta $Q2$ és ara fàcil ja que el joc és equilibrat quan tots dos jugadors tenen la mateixa probabilitat de guanyar. És a dir

$$p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot 40} = \frac{1}{2};$$

per tant, per a què el joc fos equilibrat el llapis hauria de mesurar

$$l = 10\pi \simeq 31.4\text{cm},$$

un llapis certament molt llarg.

De manera general la relació entre la longitud del llapis i la separació de les línies horitzontals ha de ser de $\pi/4$ per a què el joc sigui equitatiu.

Es considera que amb aquest problema neix la teoria de les probabilitats geomètriques. Es tracta d'un joc d'atzar en el qual no podem aplicar la típica fórmula de

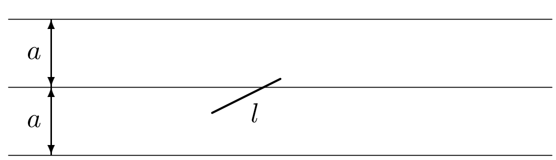
$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}},$$

ja que no podem *comptar* aquests casos (n'hi ha infinites possibilitats), sinó que cal *mesurar-los*. Passem de l'aritmètica a la geometria.

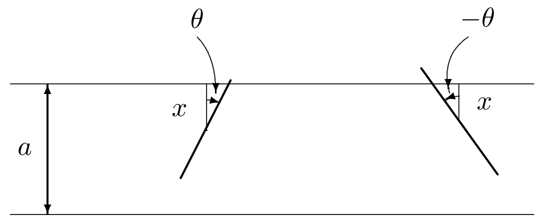
### Càlcul de la probabilitat en el problema de l'agulla de Buffon

La versió abstracta del problema de Buffon es pot pensar així:

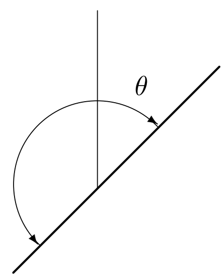
Suposem el pla dividit per rectes horitzontals separades entre elles una distància $a$, i llancem una agulla, o un llapis, com vulgueu, de longitud $l$ que suposarem més petita que $a$.




La primera dificultat és poder descriure la posició en què ha caigut l'agulla. Això ho podem fer de diverses maneres però elegirem la següent, que ens anirà bé per als càlculs. Anomenarem $x$ la distància entre el centre de l'agulla i la primera recta horitzontal que hi ha per sobre d'ell, i $\theta$, l'angle entre aquesta semirecta vertical i l'agulla, mesurat des de la vertical. Si anem cap a la dreta, serà positiu, i si anem cap a l'esquerra, negatiu.

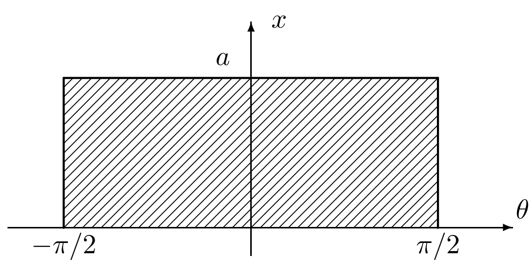



Per a evitar que una mateixa posició de l'agulla es pugui representar per dos angles (que serien suplementaris) restringirem els valors de $\theta$ a l'interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, és a dir $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.




D'aquesta manera tenim tantes posicions possibles de l'agulla com parells $(x, \theta)$ amb $0 \leq x < a \quad \text{i} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Correspon al *nombre* de casos possibles; però, com hem dit abans, no els podem comptar i el que farem serà *mesurar-los*.

Representem els valors de $x$ i $\theta$ en un sistema d'eixos cartesians i diem que la mesura dels casos possibles és l'àrea de la regió que determinen.



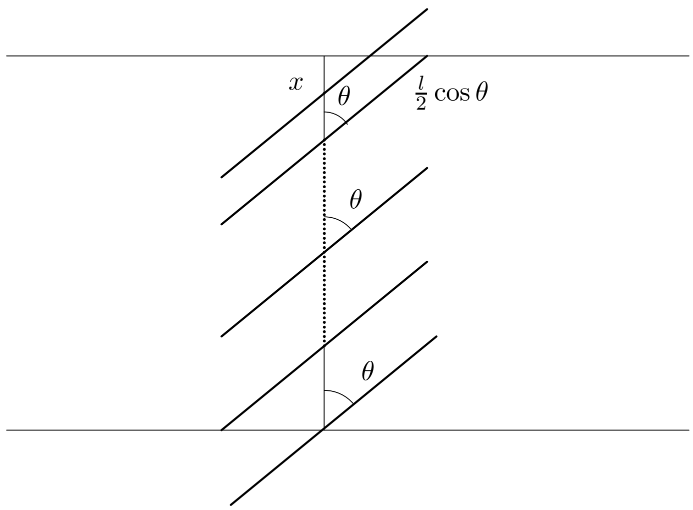

Així doncs,

$$m(\text{casos possibles}) = \pi \cdot a,$$

on posem $m$ per "mesura".

De manera semblant podem comptar, és a dir mesurar, els casos favorables.

Per a fer això fixem de moment un angle $\theta$ i anem desplaçant verticalment l'agulla sobre una banda d'amplitud $a$ mantenint-la sempre formant un angle $\theta$ amb la vertical.




Ens adonem que, si

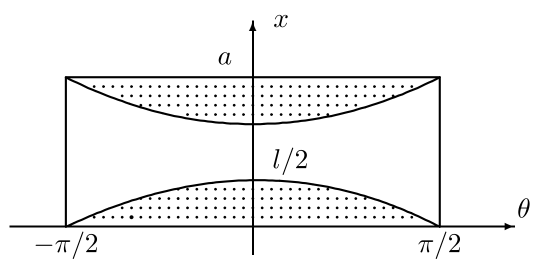
$$0 \leq x < \frac{l}{2} \cos\theta,$$

l'agulla talla la recta horitzontal superior, mentre que si

$$a - \frac{l}{2} \cos\theta < x < a,$$

l'agulla talla la recta horitzontal inferior de la banda.

Dibuixem els gràfics de les funcions $x = \frac{l}{2}\cos\theta$ i $x = a - \frac{l}{2}\cos\theta$




que són simètriques respecte a la recta horitzontal $x = \frac{a}{2}$.

Així doncs, les posicions de l'agulla descrites per parells $(x, \theta)$, pertanyents a una d'aquestes regions ombrejades de la figura, corresponen a posicions de tall.

Per analogia amb el que hem fet abans, l'àrea d'aquesta figura ens dóna una bona mesura de la *quantitat* de posicions de tall, és a dir dels casos favorables.

$$\begin{aligned} m(\text{casos favorables}) &= \text{àrea entre la gràfica de } x = \frac{l}{2}\cos\theta \text{ i l'eix } x = 0 \\ &+ \text{l'àrea entre la gràfica de } x = a - \frac{l}{2}\cos\theta \text{ i l'eix } x = a. \end{aligned}$$

Com que aquestes dues àrees són iguals, tenim

$$m(\text{casos favorables}) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos\theta d\theta =$$
$$= l[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = l[1-(-1)] = 2l$$

Finalment, doncs, la probabilitat de tall buscada és

$$p = \frac{m(\text{casos favorables})}{m(\text{casos possibles})} = \frac{2l}{\pi a},$$

com havíem dit.

Una característica extraordinària d'aquest resultat és que ens permet obtenir bones aproximacions del número $\pi$ simplement llançant llapis a terra durant una estona d'avorriment. En efecte, la probabilitat és una bona aproximació de la freqüència amb què un esdeveniment es dóna, més bona com més gran sigui el nombre de tirades. Per exemple, si en Sergi tira 100 vegades el llapis i obté que el llapis talla 25 vegades, la freqüència de tall 25/100 és una aproximació de la probabilitat de tall $p$, de manera que tenim

$$\frac{25}{100} \sim \frac{2\cdot 15}{\pi\cdot 40},$$

d'on $\pi \sim 3.1$.

El 1901, Lazaroni va llançar l'agulla 34 080 vegades i va obtenir $\pi = 3.1415929$ (hi ha gent per a tot!).

Mètodes de teoria de probabilitat que no explicarem aquí permeten dir que les millors estimacions de $\pi$ s'obtenen quan $l = a$, i també ens permeten dir quants llançaments s'han de fer per a obtenir, amb una probabilitat tan alta com vulguem, el valor de $\pi$ amb un nombre determinat de xifres decimals exactes.

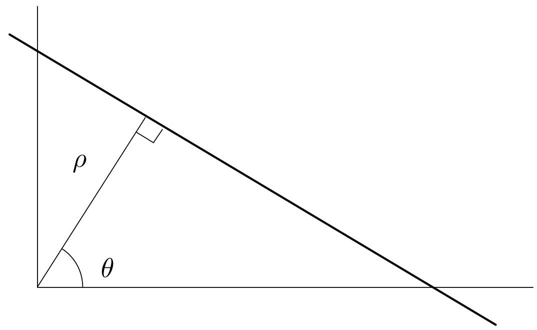
### Mesura de rectes. Fórmula de Crofton

Ara ja hem vist que l'àrea ens serveix per a comptar el *nombre* de punts d'un conjunt. La pregunta ara és: *podem comptar el nombre de rectes?* Per exemple, quantes rectes tallen un segment donat? O, quantes rectes tallen una circumferència donada? Per a respondre a aquestes preguntes farem el següent:

Per a cada recta del pla considerarem dues quantitats $(p, \theta)$ definides de la manera següent:

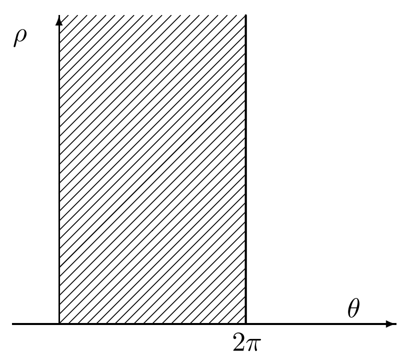
$$\begin{aligned} p &= \text{distància de la recta a l'origen de coordenades} \\ \theta &= \text{angle entre l'eix de les } x \text{ i la perpendicular a la recta per l'origen} \end{aligned}$$

Considerarem $\theta$ mesurat sempre des de la part positiva de l'eix de les $x$ fins a la perpendicular per l'origen en sentit antihorari.




D'aquesta manera tenim tantes rectes en el pla com parells $(p, \theta)$ amb $0 \leq p < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Hi ha un petit problema amb $p = 0$, però que no afecta el raonament posterior.

Podem representar-les, doncs, com els punts d'una banda en el pla $(p, \theta)$ :




Observem que la recta que correspon al punt $(p, \theta)$ té equació cartesiana

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

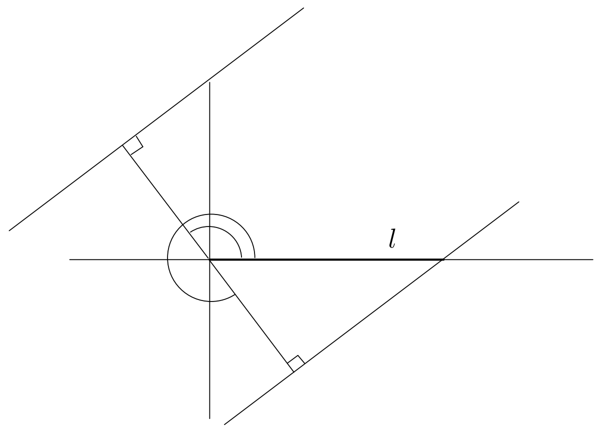
ja que passa pel punt $(x, y) = (p \cos \theta, p \sin \theta)$ i té pendent $-\mathrm{ctg}\, \theta$.

Aquesta interpretació ens permet respondre ja les preguntes abans considerades; concretament anem a calcular *quantes rectes tallen un segment de longitud $l$*.

Començarem estudiant el cas més senzill en què aquest segment està situat sobre l'eix de les $x$ amb origen $(0, 0)$ i extrem $(l, 0)$. És a dir,

$$\text{segment} = \{(x, 0); 0 \leq x \leq l\}.$$

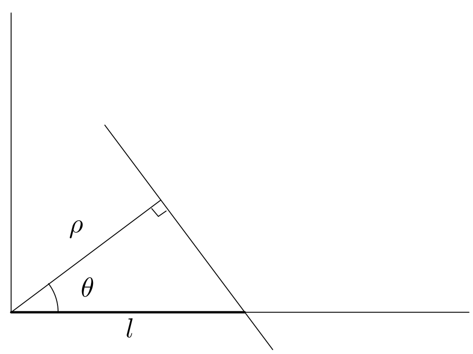
Observem primerament que hi ha valors de $\theta$ per als quals cap recta $(p, \theta)$, sigui quin sigui el valor de $p$, talla el segment donat.




Concretament, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la recta és paral·lela a l'eix de les $x$ i, per tant, no talla el segment. Si anem augmentant l'angle, és a dir per a $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, tampoc cap recta no tallarà el segment. Quan $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, ja hi ha valors de $p$ per als quals la recta $(p, \theta)$ talla el segment.

Observem a continuació que per a un angle $\theta$ fixat, amb $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, les rectes $(p, \theta)$ tallaran el segment si i només si

$$0 \leq p \leq l \cos\theta$$

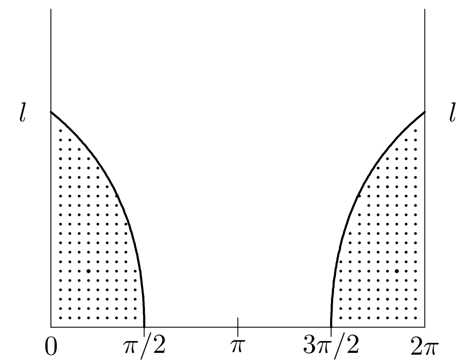



Resumint aquestes dues observacions, veiem que una recta $(p, \theta)$ talla el segment donat si

$$0 \leq p \leq l \cos\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

Si dibuixem això a la banda del pla $(p, \theta)$, tenim




L'àrea d'aquesta regió ens mesura la *quantitat* de rectes que tallen el segment.

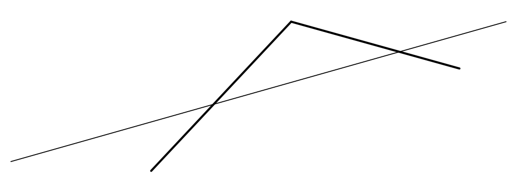
$$\begin{aligned} m(\text{rectes que tallen}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos\theta d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} l\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos\theta d\theta = 2l[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2l. \end{aligned}$$

Obtenim així un resultat realment remarcable: *La mesura de rectes que tallen un segment de longitud $l$ és $2l$.*

Si el segment no es troba sobre l'eix de les $x$, sinó en una posició arbitrària, el càlcul és una mica més complicat però el resultat és el mateix. De fet estem fent les coses de manera que els resultats obtinguts siguin *invariants per moviments rígids*, és a dir girs i translacions. Això és una característica fonamental i molt natural, ja que les mesures que volem fer no han de dependre del lloc o posició en què les fem.

Així doncs, acceptarem sense demostració (per no perdre el fil) que independentment de quina sigui la posició del segment la mesura de les rectes que el tallen és igual a dues vegades la seva longitud.

Si en lloc de tenir un segment tenim la figura formada per dos segments consecutius, la mesura de rectes que tallen aquesta figura serà la mesura de les rectes que tallen el primer segment més la mesura de les rectes que tallen el segon segment. Però, atenció, perquè d'aquesta manera hi ha rectes que les estarem comptant dues vegades, les rectes que tallen els dos segments a la vegada.



El mateix passa si la figura està formada per la unió de diversos segments, és a dir per a qualsevol poligonal. Cada recta pot tallar diverses vegades la poligonal.

Per tant, si sumem les mesures de les rectes que tallen cada segment de la poligonal, el que obtindrem és que

> *la mesura de rectes que tallen una poligonal, comptades cadascuna d'elles tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta poligonal.*

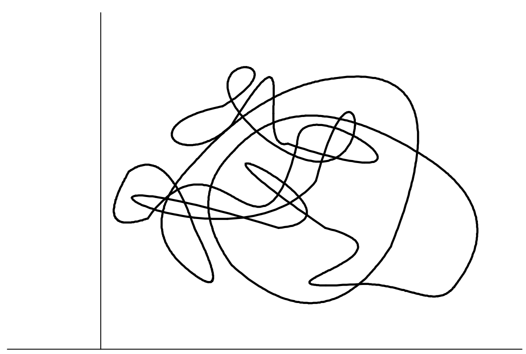
De manera general, per un procés de pas al límit, i a causa que tota corba (prou bona) es pot aproximar per una poligonal, tenim el resultat conegut amb el nom de fórmula de M.W. Crofton (1818), que diu

$$\int n(p,\theta)dpd\theta = 2l(C),$$

on la integral està estesa a aquells $(p,\theta)$ tals que la recta corresponent talla una corba donada $C$, de longitud $l(C)$, i $n(p,\theta)$ és el nombre de talls de la recta $(p,\theta)$ amb la corba. Es llegeix com abans dient que

> *la mesura de rectes que tallen una corba, comptades cadascuna d'elles tantes vegades com la talli, és igual a dues vegades la longitud d'aquesta corba.*

Aquesta fórmula s'aplica amb èxit a calcular longituds de corbes complicades com ara la de la figura a base de comptar el número de talls d'aquesta corba amb *moltes* rectes de manera que s'obtingui una bona aproximació de la integral.



Per exemple, si agafem una família de rectes horitzontals separades entre elles una distància $r$ i a continuació les fem girar angles de $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, obtenim un enreixat de rectes que tallaran la nostra corba en un nombre de punts que aproxima la integral de la fórmula de Crofton.

Concretament es pot veure que

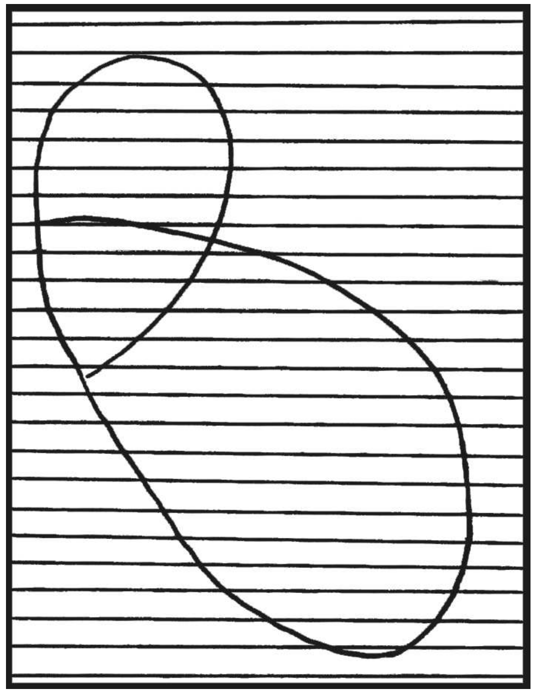
$$nr\frac{\pi}{4},$$

on $n$ és el número de talls de l'enreixat amb la corba és una bastant bona aproximació de la integral.

Així doncs, podeu construir-vos amb paper transparent aquest enreixat, posar-lo al damunt de la figura anterior, comptar el nombre de talls d'aquestes rectes amb la corba, i tindreu una aproximació de la longitud de la corba per

$$l \sim \frac{1}{2}nr\frac{\pi}{4}.$$

La corba següent ha estat dibuixada desenrotllant un cordill de 30 cm sobre el paper.



Amb un enreixat com l'anterior, construït a partir de rectes horitzontals separades 0.4 cm s'obtenen aproximadament 180 punts de tall, de manera que

$$l \sim \frac{1}{2} 180 \cdot 4 \cdot \frac{3.14}{4} = 282.6\,\mathrm{mm},$$

resultat força aproximat.

Posant aquests enreixats transparents en un microscopi electrònic s'ha aconseguit calcular longituds de molècules d'ADN.

Diguem finalment que aquests dos problemes explicats aquí formen part de la disciplina anomenada geometria integral, que té moltes aplicacions a la biologia i la medicina i que, potser per això, és avui un tema d'actualitat. De fet, hi ha tota una branca de la geometria integral, anomenada estereologia, on conflueixen l'estadística, la geometria i la medicina, que es dedica aquests temes.

El referent mundial de la geometria integral és en Lluís Antoni Santaló, matemàtic català nascut el 1911 a Girona, si bé establert a l'Argentina, on es va haver d'exiliar a causa de la guerra civil. El seu manual *Integral Geometry and Geometric Probability* és llibre de capçalera de tots els que es dediquen a la geometria integral o a la estereologia.