
## 3.5 Experimentació numèrica

Selecció de problemes preparada per Joan Torregrosa i Arús, professor de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 19 36, e-mail: torre@mat.uab.es.



**3.5.1.** El professor ens demana les arrels de l'equació $x^2 - 2000x + 1 = 0$ amb totes les xifres correctes que ens permeti la nostra calculadora. Comproveu que l'expressió

$$1000 \pm \sqrt{1000^2 - 1}$$

no és una manera efectiva de calcular l'arrel corresponent al signe menys. Trobeu una expressió equivalent, però que doni menys error de càlcul.

*Resposta:* $5.00000125E-04,\ 1.9999995E+03$

**3.5.2.** Hi ha diversos mètodes per a calcular l'arrel quadrada d'un nombre. Comproveu que, si teniu una calculadora que només pot sumar, multiplicar i dividir, podeu usar la successió definida per l'expressió recurrent

$$x_0 = c,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

per a calcular $\sqrt{c}$, per a qualsevol número $c$ positiu. Useu aquest mètode per a trobar $\sqrt{2}$. Quants passos heu de fer per a què $x_{n+1}$ i $x_n$ coincideixin, almenys per a tots els dígits que us dóna la vostra calculadora?

**3.5.3.** (*) Un amic nostre s'acaba de comprar una calculadora nova, i ens diu que

$$\sqrt{2.15283} - \sqrt{2.15263} = 0.00006815617645 = 6.815617645E-05.$$

Ens ho podem creure?

Com podríeu calcular

$$\sqrt[k]{2.15283} - \sqrt[k]{2.15263}$$

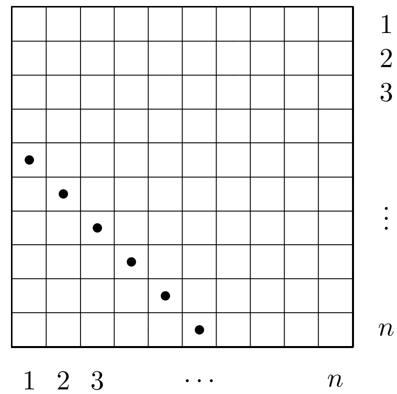
per a $k = 3, 4$?

**3.5.4.** Leonard Euler (1707-1783) va provar que els nombres primers que s'escriuen de la forma $4n+1$ s'escriuen com a suma de dos quadrats. És a dir, que existeixen $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $4n+1 = x^2 + y^2$. Comprova-ho per als primers menors que 100, trobant el parell $(x, y)$ corresponent a cada primer.

**3.5.5.** (*) Fullejant un llibre antic de la biblioteca hem trobat la fórmula següent:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

És certa? Comproveu-la per a uns quants valors de $n$. Demostreu-la a partir de comptar el nombre total de quadradets de mida unitat d'un quadrat de mida $n \times n$ de dues formes: una com $n^2$ i l'altres comptant els quadradets que hi ha a cada diagonal.




Noteu que no deixa de ser curiós que, en aquesta fórmula, hi hagi un polinomi de segon grau en $n$ :

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = a_2n^2 + a_1n + a_0.$$

Amb aquesta fórmula podrem sumar els primers $n$ nombres naturals, però com ens ho podríem fer obtenir una fórmula per a calcular

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2?$$

En el mateix llibre ens diu que en aquest cas la fórmula que hem de buscar ha de ser un polinomi de grau 3. Però, per més que l'hem buscat no l'hem trobada; sabríeu trobar-la?

Podríeu fer el mateix per a sumar

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3?$$

**3.5.6.** (**) Per a obtenir el valor de

$$I_k = \int_0^1 x^k \sin(\pi x)dx$$

per a tots els valors parells de $k \in \mathbb{N}$ proveu, fent servir la fórmula d'integració per parts, que es pot usar la fórmula recurrent següent:

$$I_0 = \frac{2}{\pi},\ I_k = \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2}I_{k-2}.$$

Calculeu fent servir una calculadora el valor de $I_k$ per $k = 2, 4, 6, 8, 10$. Quin valor s'obté per a $I_{20}$? S'assembla al valor correcte, que és $6.68022456848E-03$? Quina explicació hi trobeu?

D'altra banda, considerem la mateixa recurrència que abans, però escrita al revés:

$$I_{k-2} = (\pi - \pi^2 I_k)\frac{1}{k(k-1)}.$$

Prenem ara un valor erroni de $I_{40}$, per exemple $\hat{I}_{40} = 0$. A partir d'aquest valor, si substituïm a la fórmula fins a obtenir $\hat{I}_{20}$, arribem ara a un resultat correcte. Podries dir que està passant?

**3.5.7.** (*) Per a quins $n \in \mathbb{N}$ les solucions de l'equació

$$nt^2 + (n+1)t - (n+2) = 0$$

són nombres racionals? Feu-ho per a alguns valors de $n$ petits.

**3.5.8.** (*) Donada la funció $f(x) = x^2 + x$, hi ha algun parell $(a, b)$ de nombres enters tal que $4f(a) = f(b)$?

**3.5.9.** (*) Existeixen $(a, b, c)$ nombres enters, de forma que siguin solucions del sistema d'equacions següent?

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(b+c) \end{aligned}$$

**3.5.10.** (*) A partir de l'expressió

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1},$$

es pot obtenir una expressió per a $\pi$ usant la igualtat

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.14159265358979323 85\ldots}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Quants termes us cal sumar per obtenir $\pi$ amb 2 xifres decimals correctes?

Com es millora el càlcul si, en lloc d'aquesta, usem que $\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$.

Hi ha altres maneres d'obtenir $\pi$. Proveu d'usar les expressions següents, i discutiu quina és la que creieu la millor:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\frac{10}{9}\frac{10}{11}\cdots,$$

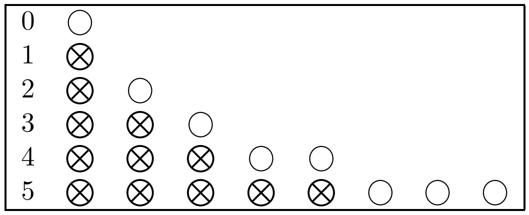
$$1 + \frac{4}{\pi} = 2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}},$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cdots}}},$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

**3.5.11.** (**) Una parella de conills joves tarden un mes a fer-se adults, és a dir, a estar en condicions de poder-se reproduir. Si suposem que una parella de conills adults té una parella de conillets cada mes, quants conills tindrem al cap d'un any, si inicialment només tenim una parella de conills joves?

Per a poder respondre a aquesta pregunta, podem plantejar la taula següent:




on el símbol ◯ representa una parella de conills joves, i ⊗ una parella de conills adults. Així, al cap d'un més la parella jove s'ha convertit en adulta, i al cap de dos mesos la parella adulta ha tingut descendència, i amb això tenim ja dues parelles, i així successivament. D'aquesta manera podem construir la successió de números següent:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

Una manera de d'escriure el que està passant, consisteix a considerar la successió recurrent següent:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ per a } n \geq 2.$$

Aquesta successió es coneix amb el nom de successió de Fibonacci.

Comproveu que es compleixen les propietats següents:

(a) $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}$ si $n \geq 1$.
(b) $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ si $n \geq 2$.
(c) Si $m$ divideix a $n$, llavors $u_m$ divideix a $u_n$.

**3.5.12.** (**) Si definim la successió de polinomis següent en la variable $t$,

$$u_0(t) = 0,\ u_1(t) = 1,\ u_n(t) = tu_{n-1}(t) - u_{n-2}(t),$$

comproveu, per a alguns valors de $n$, que

(a) $u_1(t) + u_3(t) + \cdots + u_{2n-1}(t) = u_n(t)^2$,
(b) $u_n(t)^2 = u_{n-1}(t)u_{n+1}(t) + 1$.

**3.5.13.** (**) Siguin $n_0, n_1, n_2$, tres números enters tals que $n_0 < n_1 < n_2$. Comproveu que l'expressió

$$\frac{n_2 - n_0}{2 - 0} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2 - 1} \cdot \frac{n_1 - n_0}{1 - 0}$$

també és un enter.

Si considerem ara que en tenim quatre, $n_0, n_1, n_2, n_3$, de manera que $n_0 < n_1 < n_2 < n_3$, comproveu que, també en aquest cas, l'expressió

$$\frac{n_3 - n_0}{3 - 0} \cdot \frac{n_3 - n_1}{3 - 1} \cdot \frac{n_3 - n_2}{3 - 2} \cdot \frac{n_2 - n_0}{2 - 0} \cdot \frac{n_2 - n_1}{2 - 1} \cdot \frac{n_1 - n_0}{1 - 0}$$

és un enter.

En general, si considerem $k + 1$ enters tals que $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$, l'expressió

$$\prod_{0 \leq i < j \leq k} \frac{n_j - n_i}{j - i}$$

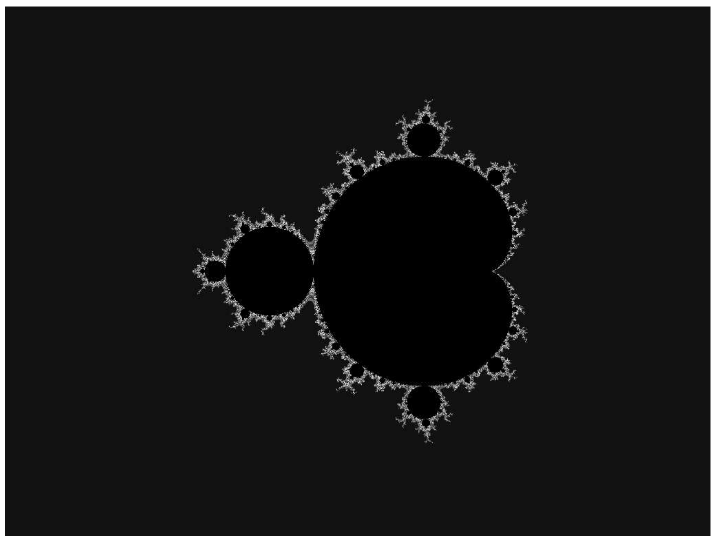
també és un enter.

**3.5.14.** (**) Siguin $a, b, c$ arrels de l'equació $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Comproveu que són diferents. Comproveu donant valors a $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

és un nombre enter.

S'ha consultat el llibre *Polynomials* de E.J. Barbeau, Springer-Verlag, 1989.



Conjunt fractal de Mandelbrot.