



3.9 Aritmètica

Selecció de problemes preparada per Enric Nart i Viñals, professor d'Àlgebra del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 14 53, e-mail: nart@mat.uab.es.



- 3.9.1.** Trobeu dos nombres naturals que sumen 5 264 i el seu mcm és 200 340.
- 3.9.2.** Trobeu l'únic nombre natural que té 8 divisors positius que sumen 320.
- 3.9.3.** (*) Proveu que $18! + 1$ és múltiple de 437.
- 3.9.4.** Proveu que el nombre de divisors positius d'un nombre natural n és senar si i només si n és un quadrat perfecte.
- 3.9.5.** Considerem la successió de nombres naturals:
- $$49, 4489, 444889, 44448889, \dots,$$
- obtinguda intercalant en cada nombre un 48 al centre del nombre anterior.
- Proveu que tots aquests nombres són quadrats perfectes i calculeu la seva arrel quadrada.
- 3.9.6.** Proveu que un nombre natural és múltiple de 9 si i només si la suma de les seves xifres és múltiple de 9.
- 3.9.7.** (*) Sigui N la suma de les xifres del número 6666^{6666} i sigui M la suma de les xifres del número N . Calculeu el valor de la suma de les xifres de M .
- 3.9.8.** En un institut de secundària hi ha matriculats 486 alumnes. Un cert dia el conserge observa que el $36.3636\dots\%$ dels que assisteixen a classe duen ulleres i que el $67.567567\dots\%$ duen texans. Quants alumnes van faltar a classe aquell dia?
- 3.9.9.** (*) Quines són les dues últimes xifres de $1147^{1628^{111}}$?
- 3.9.10.** Una banda de 17 pirates s'apodera d'un botí de monedes d'or, totes d'igual valor. Decideixen repartir-les a parts iguals, donant les 3 peces que sobren al seu cuiner xinès. Després d'una baralla entre ells, moren 6 pirates i els sobrevivents decideixen tornar a repartir-se les monedes (incloses les 3 del cuiner) a parts iguals, donant les 4 que sobren al cuiner. En el viatge de tornada, el vaixell s'enfonsa i només se salven el botí, 6 pirates i el cuiner. Tornen a repartir tot el botí i sobren 5 monedes per al cuiner. Quan el cuiner mata tots els pirates i es queda el botí sencer, amb quina fortuna mínima estimeu que enceta una nova vida?
- 3.9.11.** La Carme treballa quatre dies seguits i en descansa un. La Norma en treballa dos i en descansa un. Només es veuen els dies de lluna plena (un de cada vint-i-vuit). La Norma va tenir dia lliure ahir, la Carme el tindrà demà passat i fa 10 dies que era lluna plena. Quants dies falten per a què es vegin?

- 3.9.12.** Proveu que si a, b, c són tres nombres enters senars, l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ no té cap solució racional.
- 3.9.13.** Considerem un polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, amb els coeficients a_0, \dots, a_n enters. Proveu que si x és un nombre racional que és arrel del polinomi i escrivim x com una fracció irreductible: $x = \frac{p}{q}$, amb numerador i denominador enters sense factors en comú, aleshores forçosament:

$$a_0 \text{ és múltiple de } p \text{ i } a_n \text{ és múltiple de } q.$$

Utilitzeu aquest fet per a dissenyar i programar un algoritme que trobi totes les arrels racionals d'un polinomi amb coeficients enters.

Il·lustreu el mètode calculant totes les arrels racionals del polinomi: $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$.

- 3.9.14.** En un triangle rectangle amb costats de longitud entera, el producte de les longituds dels catets és múltiple de 12, i la longitud d'algun dels costats és múltiple de 5.
- 3.9.15.** (*) Trobeu tots els parells n, m de nombres naturals diferents que satisfan: $n^m = m^n$.
Indicació: estudeu la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x}{\log(x)}$.

- 3.9.16.** La Lliga de futbol professional ha estimat en 260 700 milions de pessetes el valor total en el mercat del conjunt de futbolistes professionals que juguen a primera divisió. L'estimació s'ha fet classificant els jugadors en quatre categories: "cracs", "figures", "bons" i "mediocres", amb un valor de mercat de 3 825, 1 260, 700 i 300 milions de pessetes per a cada jugador de la categoria corresponent.

Sabent que 359 jugadors han estat declarats com a mediocres i que Dani, del Barça, ha estat classificat com a figura, trobeu quants cracs hi ha a la lliga.