3.2 Anàlisi

Selecció de problemes preparada per Joan J. Carmona, Armengol Gasull i Francesc Mañosas, professors del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. Per a comentaris sobre els problemes podeu contactar amb Francesc Mañosas, tel.: 93 581 26 06, e-mail: manyosas@mat.uab.es.

3.2.1. Considereu l'equació recíproca de quart grau $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$. Trobeu les seves quatre solucions fent el canvi de variable $y = x + \frac{1}{x}$. Compareu el mètode proposat amb el mètode general explicat a la secció 2.9.

3.2.2. Demostreu que

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots = \frac{1+3+5+\cdots}{\cdots} = \cdots$$

Interpreteu aquest resultat geomètricament.

3.2.3. (*) Demostreu que

$$x^3 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8} = \left(x - \tfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(x - \tfrac{1-\sqrt{5}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{8}\right)\left(x - \tfrac{1-\sqrt{5}-\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{8}\right).$$

Useu que $\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{4\pi}{10}$ i la descomposició anterior per a calcular $\sin\frac{\pi}{10}$.

3.2.4. (**) Com ja sabeu, al Brasil hi ha molta inflació. El 1985, el seu Govern va decidir que la manera mensual d'ajustar els salaris i els interessos bancaris seria la següent: *Si x_1, x_2 i x_3 són les inflacions mensuals dels tres mesos anteriors, aleshores els salaris i els comptes corrents augmentarien aquell mes un interès*

$$x = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3},$$

és a dir la mitjana geomètrica de les tres inflacions.

Demostreu que per a $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ sempre es compleix

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

i així entendreu per què el Govern va pendre la mitjana geomètrica en lloc de l'aritmètica.

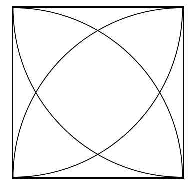
3.2.5. (*) Siguin x, y, z, t números reals arbitraris. Escriviu la funció

$$f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt$$

com a suma de quadrats d'expressions involucrant x, y, z, t. Per tant, haureu demostrat que $f(x, y, z, t) \geq 0$ per a tot x, y, z, t. Relacioneu aquest resultat amb el problema anterior.

Recull preparat per Joan J. Carmona, Armengol Gasull i Francesc Mañosas
per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 114–117).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

3.2.6. Considereu un quadrat de costat $a > 0$. Amb centre a cada un dels seus vèrtexs, dibuixem una circumferència que passi pels altres dos vèrtexs. El quadrat queda dividit en nou zones com a la figura. Calculeu l'àrea de cadascuna d'elles.



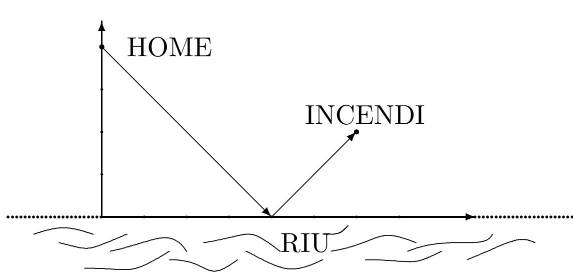
3.2.7. En un desert, i situats a cada un dels vèrtexs d'un triangle equilàter de 1000 km de costat hi ha tres vehicles. Les seves velocitats màximes són de 40 km/h, 60 km/h i 100 km/h. De sobte reben l'ordre per ràdio que s'han de trobar el més aviat possible. Quant tardaran a trobar-se i quin camí hauran de seguir? Suposem que cada conductor sap exactament on es troba cadascun dels altres dos vehicles, que els conductors son intel-ligents i que el seus vehicles poden agafar la seva velocitat màxima instantàniament. Fins a quin valor pot disminuir la velocitat màxima del vehicle més ràpid de forma que el punt de trobada no canviï.

3.2.8. (**) Un camió pot carregar combustible per a recórrer una distància màxima de 900 km. També disposa i pot transportar bidons buits de totes les mides. Ha de travessar un desert que fa d'ample 1 500 km. Com podria fer-ho per a travessar-lo, suposant que al punt de sortida té tant de combustible com necessiti?

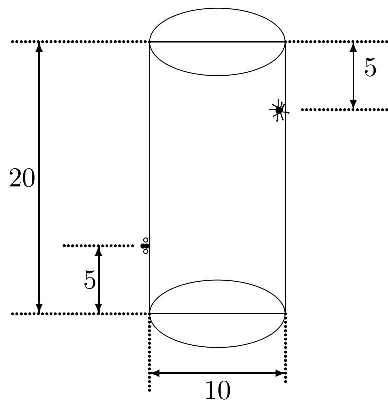
Explicarem, com a pista, com ho podria fer per a travessar un desert d'una amplada de 1 200 km: ompliria el camió de combustible i s'endinsaria 300 km en el desert; deixaria un dipòsit per a recórrer 300 km i tornaria enrere amb el combustible restant. Ompliria de nou el camió. Quan arribés al lloc del dipòsit, podria tornar a omplir el camió i podria fer 900 km més. En total, els 1200 km que mesura el desert.

Quina és l'amplada màxima de desert que podria travessar el camió sense preocupar-se del temps que tardés? I suposant que anés sempre a 60 km/h, quina és l'amplada màxima que podria travessar en una setmana?

3.2.9. Hi ha un incendi en el punt del pla (30,10). Hi ha un home amb una galleda situat en el punt (0,20). L'eix de les x és un riu. L'home ha d'anar fins al riu, omplir la galleda i apagar l'incendi. Quin és el camí més curt? Vegeu també el problema 3.3.3. Indicació: podeu plantejar el problema com un problema de màxims i mínims, però hi ha un argument geomètric que fa la solució evident.

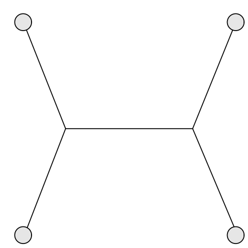


3.2.10. (*) En un got cilíndric d'alçada 20 cm i radi 5 cm hi ha una aranya al seu interior a 5 cm de la boca del got. A 5 cm de la base, però a la part exterior del got hi ha una mosca que no es pot desplaçar. A més, la mosca i l'aranya són a generatrius oposades del got. Quin és el camí més curt que ha de seguir l'aranya (i, de fet, segueix) per a arribar a la mosca? Quina serà la longitud del camí recorregut?



3.2.11. (*) Un excursionista amic nostre ens explicava entusiasmat que l'altre dia va pujar al Puigmal. Ens deia que va sortir a les 8 del matí de Ripoll i que arribava a dalt exactament a les 8 del vespre. Després de descansar 12 hores va fer el camí de baixada pel mateix lloc, tardant també 12 hores. Avui encara està rumiant el que li vaig dir: *Segur que hi ha d'haver un instant entre les 8 del matí i les 8 de la tarda en el qual eres al mateix lloc en pujar que en baixar*. El pots ajudar a aclarir per què?

3.2.12. (*) Es vol construir una interconnexió viària entre quatre ciutats col·locades als vèrtexs d'un quadrat de costat 100 km. Quin és el disseny de carreteres que fa mínima la longitud total dissenyada? Ajuda't de la figura adjunta.



3.2.13. (*) Diem que una recta d'equació $y = r(x)$ és una asímptota obliqua d'una funció $f(x)$ quan $x \to \infty$ si $\lim_{x\to\infty}(r(x) - f(x)) = 0$. Demostreu que el pendent de l'asímptota es pot calcular fent $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Suposeu que f és derivable a tot punt i que el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existeix, aleshores demostreu que el pendent també es pot calcular fent $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. Doneu un exemple en el que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existeixi, i en canvi $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no existeixi.

3.2.14. (*) Demostreu que el volum d'una esfera de radi R és $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.2.15. D'entre tots els triangles rectangles de perímetre $8 + 4\sqrt{2}$, trobeu el d'àrea màxima.

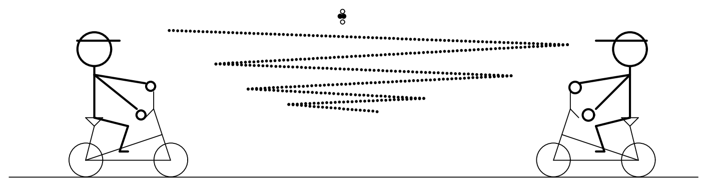
3.2.16. (**) Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$

3.2.17. (**) Trobeu tots els polinomis amb coeficients reals $P(x)$, que compleixin

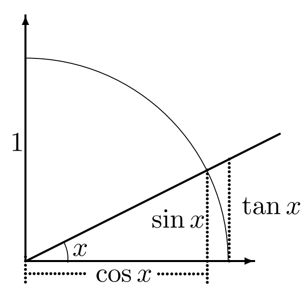
$$P(x^2) = P(x)P(x-1),$$

per a tot $x \in \mathbb{C}$.

3.2.18. Dos ciclistes, separats 50 km, van en línia recta l'un cap a l'altre, a una velocitat constant de 25 km/h cadascun. Una mosca, que vola a 35 km/h, decideix anar volant d'un ciclista a l'altre, des que comencen a moure's fins que es troben. Quina distància total ha recorregut la mosca? Suposem que no perd gens de temps cada cop que canvia de sentit.



3.2.19. (*) Demostreu que si $0 < x < \pi/2$, aleshores $\sin x < x < \tan x$ (vegeu la figura adjunta). Apliqueu aquestes acotacions per veure que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Utilitzeu aquest darrer resultat i el fet de que $\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$ per a provar que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Demostreu també que $(\sin x)' = \cos x$. Finalment, sense fer cap càlcul més, digueu quant val $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.



3.2.20. Demostreu que per a tot $x > 0$, $x^e \leq e^x$. Aquí $e = \exp 1 = 2.718\ldots$

3.2.21. (*) Sigui $p(x) = (x^2 - x - 1)^{1999} + (x^2 - x - 1)^{1980}$. Considereu el polinomi derivat $p'(x)$. Calculeu la suma de tots els seus coeficients.

3.2.22. Una partícula es mou al pla. La seva posició en cada instant t està donada per $(x(t), y(t))$. Suposeu que a l'instant $t = 0$ està situada a l'origen de coordenades, que té una velocitat inicial $v_0 = (a_0, b_0)$ i que la seva acceleració depèn proporcionalment del temps, és a dir $a(t) = (a_1 t, b_1 t)$. Trobeu explícitament $(x(t), y(t))$.

3.2.23. (*) A la secció 2.2 s'explica el que són les fraccions contínues i com es calculen. Demostreu que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}}}}, \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cdots}}}}}.$$