1.6 Sobre la portada

Moltes vegades, quan m'han presentat a una persona i hem començat a parlar sobre les nostres respectives ocupacions, ha sorgit la mateixa pregunta ...

Què més es pot fer en matemàtiques?

La matemàtica és un dels molts mitjans de comunicació que crea l'home per a la seva relació amb el món que l'envolta, i com a tal es desenvolupa amb cada nova interpretació que fem del comportament de la natura. El més extraordinari, i que és comú a tots els àmbits del saber, és que la nostra manera d'interpretar els futurs fenòmens naturals depèn al seu torn dels elements dels quals ara disposem. Aquesta realimentació (*feedback*) és un dels factors que fa evolucionar la matemàtica, i això és el que hem pretès representar, tant pel que fa a la forma com al contingut, amb la imatge de la portada.

A la Grècia clàssica, una part del coneixement que tractava del que ara coneixem amb el nom de física, estava centrada en l'estudi de les lleis de l'estàtica (Arquímedes, 287-212 a.C.): les relacions entre les llargades dels braços d'una balança i els pesos que se situen a cadascun dels extrems per tal que es mantinguin en equilibri; les lleis de la palanca; etc. Les representacions geomètriques que aquests problemes involucraven eren circumferències, triangles i polígons en general, i les qüestions plantejades giraven entorn de les relacions entre el perímetre i el radi (en el cas de la circumferència), o entre dos o més costats (en el cas dels polígons). És per tots conegut el teorema de Pitàgores (569-470 a.C.) que relaciona la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle amb la dels seus catets.

Des de la creació de la dinàmica moderna per Galileu (1564-1643), i la incorporació del temps en les equacions de la física, els objectes geomètrics a què han donat lloc els problemes plantejats han canviat. La geometria de la dinàmica ha generat corbes com la branquistocrona, la cicloide, etc., i més recentment objectes que avui coneixem amb el nom de fractals (Mandelbrot, 1975). Aquests objectes no admeten una definició "estàtica", com succeeix en el cas de la circumferència (el lloc geomètric dels punts que són a la mateixa distància d'un punt donat), el triangle rectangle (polígon de tres costats que té un angle recte), etc. La comprensió dels objectes fractals exigeix, en la seva versió més estesa, un procés iteratiu infinit. És a dir, únicament podem fer-nos una idea de l'objecte després d'un procés iteratiu, del qual només coneixem els primers estadis i del qual *mai no podem tenir una imatge completa.*

El floquet de neu de von Koch

Un exemple clàssic d'objecte fractal és la corba de von Koch (introduïda l'any 1904), l'interior de la qual es coneix com floquet de neu de von Koch. A la figura 1 representem els primers passos en la construcció d'un dels costats de la corba de von Koch.

La construcció comença amb un triangle equilàter de costat l igual a la unitat de mesura, per exemple metres, i per tant de perímetre p igual a 3 metres. A continuació, en el terç central de cadascun dels costats es col·loca un triangle equilàter, amb els costats de longitud $l = 1/3\,m$, vegeu la figura 1.(b). D'aquesta manera s'obté una estrella de sis puntes. Notem que cadascun dels tres costats del triangle original s'ha substituït per quatre segments de longitud $1/3\ m$, per la qual raó la figura actual consta de $12 = 3 \times 4$ costats i té un perímetre de $p = 12 \times 1/3 = 3 \times 4/3\,m$. En el pas següent substituïm novament cada terç central dels dotze costats per un triangle equilàter de costat $l = 1/9 = 1/3^2\ m$, vegeu la figura 1.(c). Això proporciona un polígon de $36 = 12 \times 3 = 3 \times 4^2$ costats i de perímetre $p = 36 \times 1/3^2 = 3 \times 4^2/3^2$ m.

Article preparat per Antonio Teruel per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 14–16).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

Si repetim el procés n cops, és senzill concloure que la figura obtinguda és un polígon de 3×4^n costats i que la longitud de cada costat es $l = 1/3^n\ m$, i dona com a resultat que el perímetre és de $p = 3 \times (4/3)^n\ m$. Ni tan sols en aquest moment tenim una representació completa de la corba de von Koch. Per aconseguir això hem de fer el pas al límit quan n tendeix a infinit. D'aquí es dedueix que el perímetre del floquet de neu de von Koch té longitud infinita, $\lim\limits_{n \nearrow +\infty} 3 \times (4/3)^n = +\infty$.

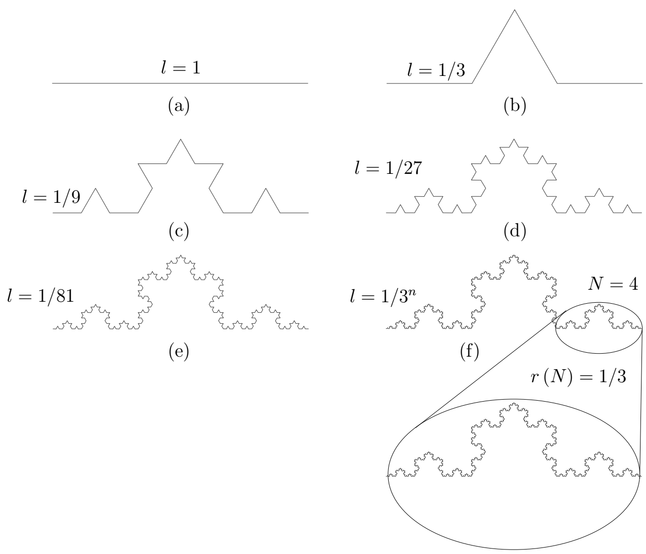

Figura 1. Construcció d'un dels costats de la corba de von Koch. (a) 1 costat de longitud 1; (b) 4 costats de longitud 1/3; (c) 4^2 costats de longitud $1/3^2$; (d) 4^3 costats de longitud $1/3^3$; (e) 4^4 costats de longitud $1/3^4$; (f) 4^n costats de longitud $1/3^n$.

Hauríem canviat poc la nostra percepció del món si continuéssim contestant les mateixes preguntes que contestava Pitàgores en els seus resultats, el perímetre de la figura. És tanmateix ara la matemàtica la que qüestiona: quines propietats pot tenir una corba generada d'aquesta manera? La resposta, deguda a Hausdorff (1919) i elaborada per Besicovitch (1934) és el que s'anomena dimensió fractal o dimensió de Hausdorff–Besicovitch. El concepte de dimensió de Hausdorff-Besicovitch és prou complex per exigir un espai i unes eines que s'allunyen dels nostres propòsits. Tanmateix podem introduir aquí un concepte equivalent (útil en el cas de figures autosemblants), la dimensió de semblança.

Diem que una figura (en el nostre cas una corba) és *autosemblant* si es pot dividir en trossos de manera que cadascun sigui semblant al total. Per exemple, un segment de recta es pot dividir en N trossos, sent cadascun semblant a tot el segment amb raó de semblança $r(N) = 1/N$. En el cas d'un rectangle succeeix una cosa anàloga: podem dividir-lo en N rectangles de manera que cadascun sigui semblant al total amb una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/2}$. El mateix podem fer en el cas d'un paral·lelepípede rectangular i obtenim una raó de semblança $r(N) = 1/N^{1/3}$. Un examen detallat de l'anterior ens porta a pensar que si la raó de semblança d'un objecte s'expressa com $r(N) = 1/N^{1/D}$, llavors D és la dimensió euclidiana de l'objecte. En el cas del segment, $r(N) = 1/N^{1/1}$; així doncs; $D = 1$ i és cert que la dimensió euclidiana d'un segment és 1. El mateix succeeix en el cas d'un rectangle, per al qual $D = 2$ coincideix amb la dimensió euclidiana del rectangle, i en el cas del paral·lelepípede $D = 3$. D'aquest raonament sorgeix el concepte de dimensió de semblança. Si la raó de semblança $r(N)$ d'una figura autosemblant s'expressa com

$$r(N) = \frac{1}{N^{1/D}},$$

diem que la *dimensió de semblança* de la figura és D. Prenent logaritmes i aïllant D s'obté

$$D = \frac{\log(1/N)}{\log(r(N))}.$$

En el cas particular de la corba de von Koch s'observa que cadascun dels costats es pot dividir en quatre parts ($N = 4$) semblants al costat sencer, amb una raó de semblança $r(N) = 1/3$, (vegeu la figura 1.(f)). Així doncs, la corba de von Koch té dimensió de semblança

$$D = \frac{\log(1/4)}{\log(1/3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618...$$

La dimensió fractal ha esdevingut en els darrers anys una eina molt útil en l'estudi de la natura i ha transformat la nostra manera d'entendre-la. Objectes com les costes marines, els núvols, els arbres, etc. exhibeixen un comportament fàcilment identificable amb un fractal, encara que parlant amb propietat el terme fractal no seria aplicable a cap d'aquestes coses (tampoc el concepte d'esfera és estrictament aplicable a la Terra i ningú no dubta respecte al canvi de pensament que va produir el fet de considerar-la com a tal).

Aquest no és un exemple isolat de la capacitat creadora de les matemàtiques / matemàtics. La matemàtica n'és plena, de fet, no conté res més que això.

Antonio Teruel Aguilar, professor de Matemàtica aplicada del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 18 86, e-mail: teruel@mat.uab.es.