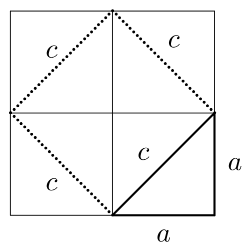
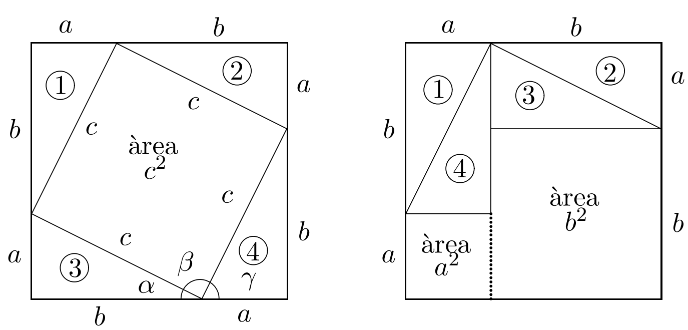
2.14 El teorema de Pitàgores

Recordem el que diu el famós teorema de Pitàgores: *En un triangle rectangle la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la seva hipotenusa.* Aquest resultat és conegut per la humanitat —almenys per alguns triangles rectangles concrets— des de fa uns 1500 anys abans de Crist a Babilònia. Pel que es coneix, la primera demostració la va donar en Pitàgores uns 500 anys abans de Crist. Des d'aleshores han aparegut moltíssimes altres demostracions (hi ha un llibre que en recopila més de tres-centes). En aquest text, basat essencialment en els llibres *Meu Professor de Matemática,* de E. Lages Lima, Coleção Do Professor de Matemática, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991 i *Comunicación Extraterrestre,* de M. Gadner, Colección Teorema, Catedra 1986, Madrid, en recordarem unes quantes.

La primera prova que donem també és atribuïda als grecs i demostra el teorema només per a triangles rectangles equilàters (és a dir, triangles rectangles amb els dos catets iguals). Aquesta prova es basa en la figura següent:



Observeu que el quadrat tort té àrea c^2; però per altra banda la seva àrea està formada per quatre triangles d'àrea $\frac{a^2}{2}$ és a dir $c^2 = 2a^2 = a^2 + a^2$. Una demostració també de l'escola grega, que és potser la més senzilla i popular, és la basada en les figures següents:



De fet, no calen gaires explicacions. Potser només cal comentar que la figura de l'esquerra amb els quatre costats de mida c és un quadrat i no un rombe. Això és a causa que $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ radiants i que $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ radiants per ser els dos angles no rectes d'un triangle rectangle; per tant, $\beta = \frac{\pi}{2}$ radiants.

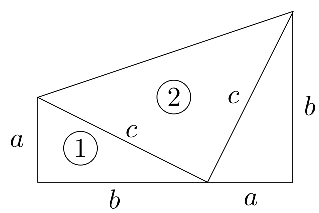
A partir de només la figura de l'esquerra i amb càlculs elementals, també s'obté una demostració usant que

$$\text{ÀREA DE QUADRAT TOTAL} = 4 \cdot (\text{ÀREA D'UN DELS 4 TRIANGLES}) + \\ + \text{ÀREA QUADRAT INTERIOR}$$

és a dir

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4\cdot\left(\frac{ab}{2}\right)+c^2,\\ a^2+b^2+2ab &= 2ab+c^2,\\ a^2+b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Una variació d'aquesta última prova, que s'atribueix a l'expresident dels EUA, J.A. Gardfield, es basa en la figura següent (que, com podem observar, és la meitat de la figura de l'esquerra anterior).



Si usem que

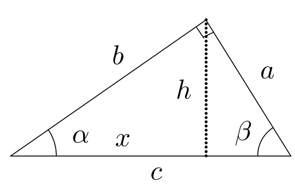
$$\text{ÀREA DEL TRAPECI} = 2\cdot(\text{ÀREA DEL TRIANGLE } 1) + \text{ÀREA DEL TRIANGLE } 2,$$

és a dir,

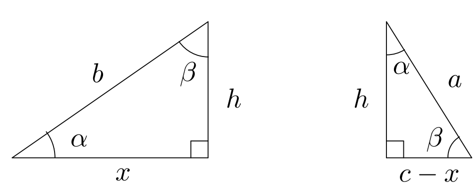
$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}(a+b) &= 2\left(\frac{a\cdot b}{2}\right)+\frac{c^2}{2}\\ \frac{a^2+b^2+2ab}{2} &= \frac{2ab+c^2}{2},\\ a^2+b^2 &= c^2,\end{aligned}$$

on hem usat que l'àrea d'un trapeci és el producte de la semisuma de les seves bases per la seva altura.

Una demostració essencialment diferent es basa en la semblança de triangles. La detallem a continuació. Prenem un triangle rectangle com el de la figura



Observem que aquest triangle determina dos altres triangles rectangles amb els mateixos angles, i per tant semblants. Aquests són



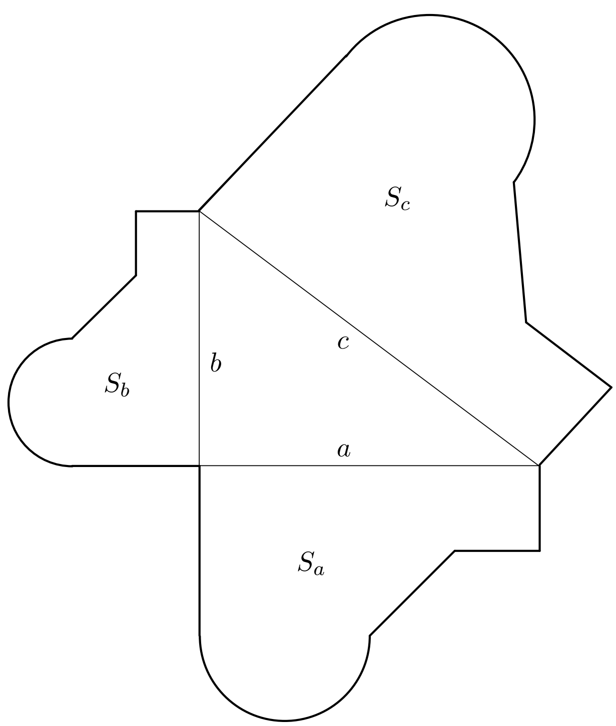
Recordem que, pel teorema de Tales (vegeu la secció d'història 5.1), els costats de triangles semblants han de mantenir les mateixes proporcions. Per tant, prenent el triangle gran i el de l'esquerra tenim $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$. Prenent el triangle gran i el de la dreta arribem que $\frac{c}{a} = \frac{a}{c-x}$. Aquestes dues expressions s'escriuen com

$$b^2 = cx \quad \text{i} \quad a^2 = c(c - x).$$

Si les sumem, tenim de nou el teorema de Pitàgores, és a dir

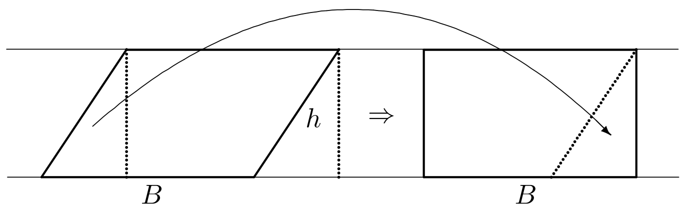
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

No és difícil veure que el teorema de Pitàgores és cert en una situació molt més general. El seu enunciat és degut al matemàtic hongarès G. Polya i ens diu: *Si sobre cada un dels costats d'un triangle rectangle hi posem figures semblants (seguint la raó de semblança donada pels costats respectius), aleshores la suma de l'àrea de les figures que es recolzen sobre els catets és igual a l'àrea de la figura que es recolza sobre la hipotenusa.* La figura següent il·lustra el teorema de Polya, $S_a + S_b = S_c$,

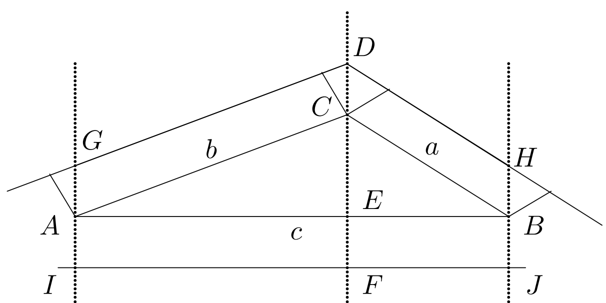


Hi ha un teorema similar al de Pitàgores, però per a triangles qualssevol, anomenat teorema de Pappus i que enunciarem tot seguit. La prova que presentem està basada en la següent propietat dels paral·lelograms:

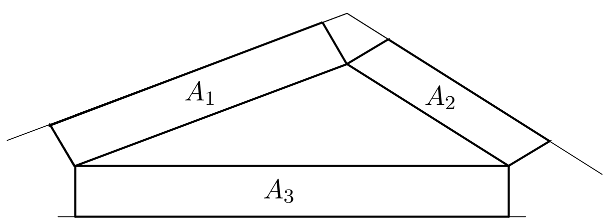
Tots els paral·lelograms amb la mateixa base B i altura h tenen la mateixa àrea Bh. Aquesta propietat es mostra a la figura següent:



El teorema de Pappus es basa en la següent construcció sobre un triangle qualsevol ABC il·lustrada a la figura següent. Es dibuixen dues línies paral·leles a AC i a BC. Suposem que es tallen a D. Dibuixem la recta que passa per DC, tracem una paral·lela a AB de manera que la distància EF sigui igual a DC. Ara tracem línies paral·leles a DC que passin per A i B



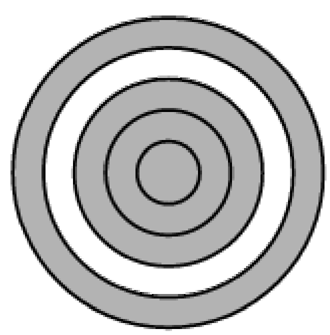
Aleshores, si es prenen paral·lelograms sobre AC i CB, les seves àrees seran iguals a les dels paral·lelograms $AGDC$ i $CDHB$ respectivament. Ara bé, aquestes àrees coincideixen amb la del paral·lelogram basat en c, $ABJI$. Resumint, el teorema de Pappus ens diu que $A_1 + A_2 = A_3$, on:



Per a acabar, parlarem una mica dels triangles rectangles amb costats de mida entera. El més senzill és el de costats 3, 4 i 5. És clar que a partir d'aquest se'n poden construir molts més: els de mides $3k$, $4k$ i $5k$, on k és un nombre natural qualsevol. Un triangle rectangle es diu *pitagòric primitiu* si els seus costats són nombres naturals sense cap divisor comú als tres. Es pot veure que tots els triangles pitagòrics primitius tenen costats a, b, c que compleixen

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

amb m i n naturals, primers entre si, i $m > n$.



Són les dues àrees fosques iguals?