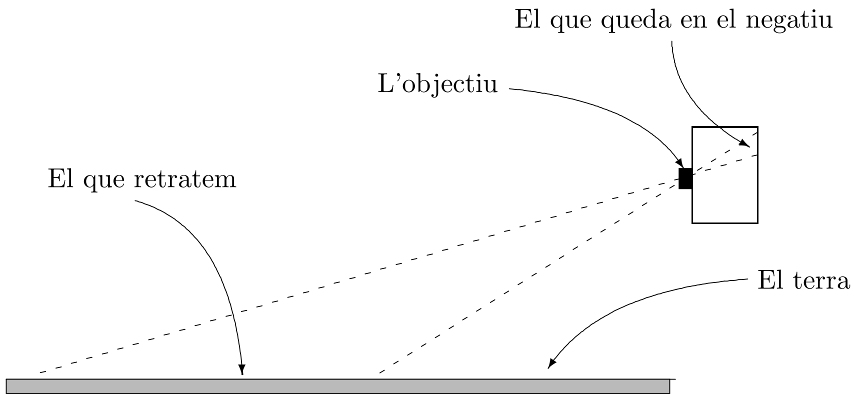
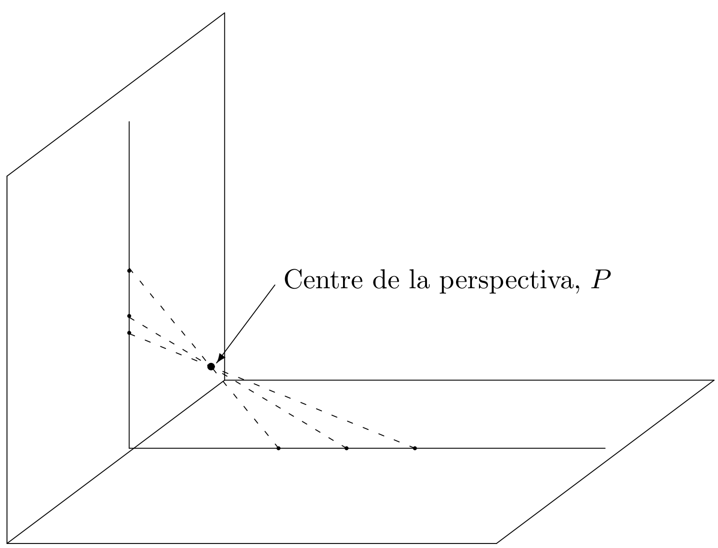
2.5 La geometria de les perspectives. La raó doble

Quan fem una fotografia podem pensar que el que queda en el negatiu no és altra cosa que la projecció sobre el pla de la pel·lícula, a través de l'objectiu de la càmera, del que hi ha sobre el terreny.



En aquest procés de projecció no només es perd la informació tridimensional dels objectes retratats (es passa de cossos a l'espai a figures sobre un pla), si no que fins i tot la informació bidimensional (les distàncies entre els punts sobre un pla fix) queden distorsionades. Per exemple, considerant els punts $X = (0, 2, 0)$, $Y = (0, 3, 0)$ i $Z = (0, 4, 0)$ del pla horitzontal $z = 0$ projectats sobre el pla vertical $y = 0$ a través del punt $P = (0, 1, 1)$, s'obtindran aquestes projeccions determinant els punts d'intersecció de les rectes PX, PY i PZ amb el pla $y = 0$ tal i com es veu en el dibuix.

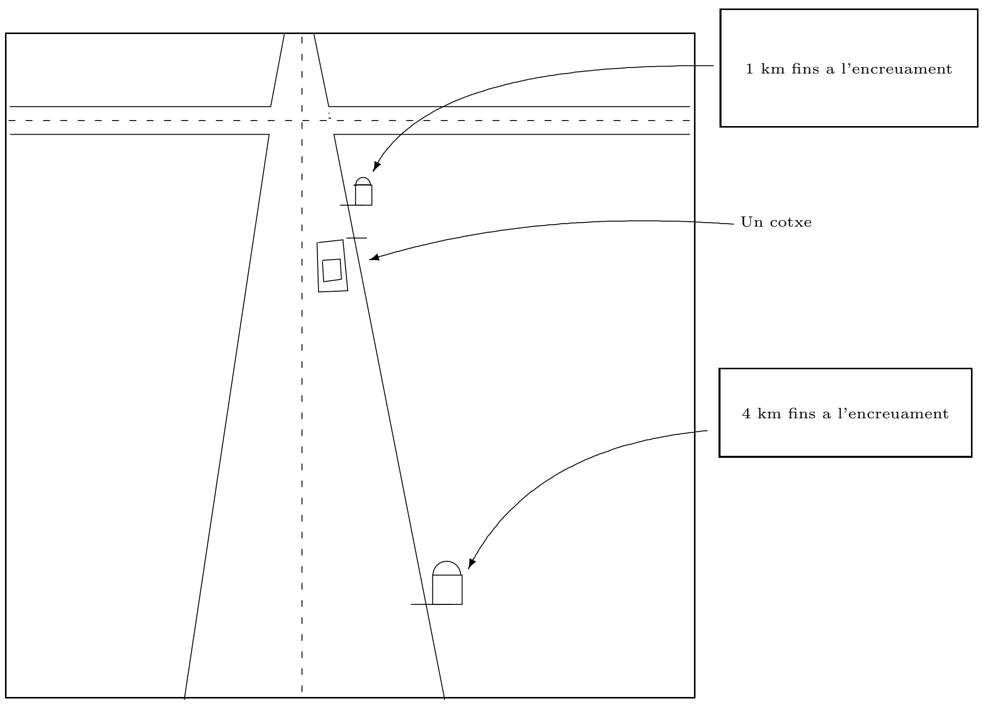


Aleshores aquests punts seran

$$X' = (0, 0, 2),\ \ Y' = (0, 0, 3/2) \text{ i } Z' = (0, 0, 4/3).$$

Es pot observar que, mentre la distància entre X' i Y' és la meitat de la distància entre X i Y, la distància entre Y' i Z' és $1/6$ de la distància entre Y i Z i la distància entre X' i Z' és $1/3$ de la distància entre X i Z. No es pot pensar, doncs, que la representació que s'obté sobre la fotografia és una representació *a escala* de la realitat. Tot i això, hi ha situacions en què les mesures realitzades sobre una fotografia poden donar prou informació per a poder calcular les distàncies *reals*. Un exemple d'això és el problema següent:

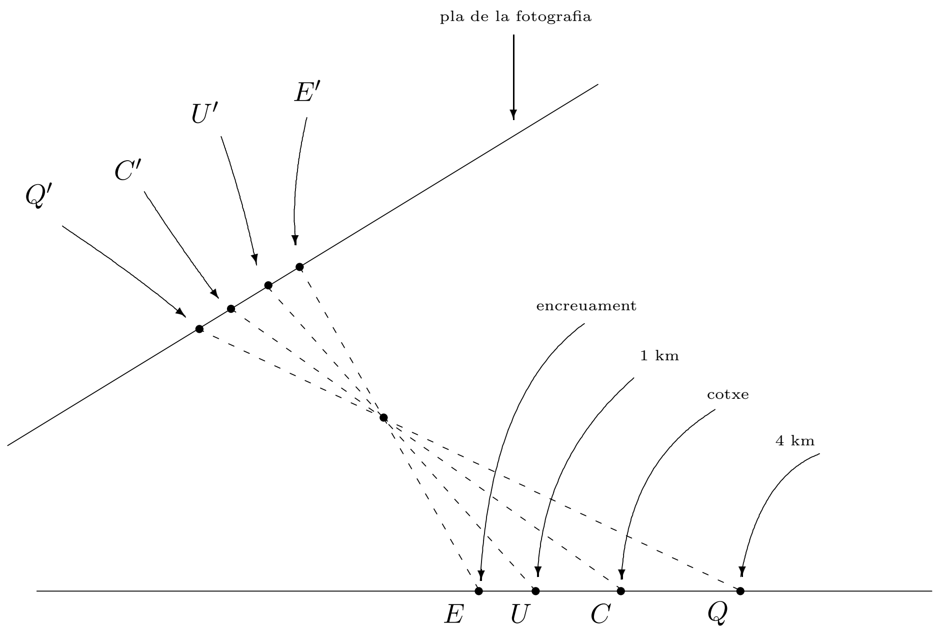
Tenim una fotografia en què s'observa l'encreuament de dues carreteres rectes sobre un lloc essencialment pla, dos senyals que marquen les distàncies sobre una de les carreteres fins a l'encreuament, i un cotxe circulant entre aquests dos senyals més o menys com en el dibuix següent (on s'han marcat els punts sobre la vora de la carretera que corresponen a cada un dels llocs mencionats)



A quina distància de l'encreuament es troba realment el cotxe?

Per a resoldre el problema notem primerament que l'alineament és una propietat que es conserva en les transformacions perspectives. En efecte, la imatge d'una recta que passi per dos punts donats és la intersecció del pla que conté aquests dos punts i el punt respecte al qual es fa la perspectiva amb el pla sobre el qual es realitza la projecció (la pel·lícula fotogràfica) i, com tothom sap, les interseccions de plans amb plans (dins l'espai tridimensional) normalment són rectes[4]. Tenint en compte això, el problema en realitat fa referència a punts que estan sobre una recta i les seves projeccions, des d'un punt desconegut, sobre una altra recta.

[4]Deixem a part els cas en què els plans resulten paral·lels. Correspon aquest cas als punts d'una recta *invisible* per a la projecció que estem realitzant, i podríem fer tota una altra exposició sobre aquest tema.



La *raó doble de quatre punts d'una recta* dóna una manera simple d'obtenir una solució. Donats quatre punts sobre una recta, es defineix la seva raó doble ρ com el quocient

$$\rho(A, B, C, D) = \frac{(AC)(BD)}{(BC)(AD)},$$

on (PQ) representa la distància del punt P al punt Q. La particularitat d'aquest nombre és que, si projectem els punts A, B, C i D sobre uns punts d'una altra recta A', B', C' i D' respectivament, el valor de $\rho(A', B', C', D')$ coincideix amb $\rho(A, B, C, D)$. Aquesta propietat és certament remarcable; ja hem dit abans que les proporcions entre les distàncies no es conservaven després de fer una projecció, i la raó doble no deixa de ser una mena de proporció entre distàncies. Un exemple concret[5] en el qual es pot observar aquesta invariància i el tipus de càlcul que intervé per a arribar a aquest resultat és el següent:

> Considerem la projecció de la recta $y = 0$ del pla sobre la recta $x = 0$ des del punt $P = (1, 1)$. Es pot comprovar que la projecció del punt $(x, 0)$ és el punt $(0, y)$ amb
>
> $$y = \frac{x}{x-1}.$$
>
> Si es tenen quatre punts de la forma $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$, $C = (x_3, 0)$ i $D = (x_4, 0)$, la seva raó doble serà
>
> $$\rho = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

[5] De fet, la demostració general de la invariància de la raó doble consisteix essencialment a reduir el problema a la situació que analitzem.

i les seves projeccions seran

$$A' = (0, \frac{x_1}{x_1 - 1})$$
$$B' = (0, \frac{x_2}{x_2 - 1})$$
$$C' = (0, \frac{x_3}{x_3 - 1})$$
$$D' = (0, \frac{x_4}{x_4 - 1});$$

de forma que la raó doble $\rho(A', B', C', D')$ serà

$$\frac{(\frac{x_3}{x_3-1} - \frac{x_1}{x_1-1})(\frac{x_4}{x_4-1} - \frac{x_2}{x_2-1})}{(\frac{x_3}{x_3-1} - \frac{x_2}{x_2-1})(\frac{x_4}{x_4-1} - \frac{x_1}{x_1-1})} =$$

$$\frac{(x_3(x_1 - 1) - x_1(x_3 - 1))(x_4(x_2 - 1) - x_2(x_4 - 1))}{(x_3(x_2 - 1) - x_2(x_3 - 1))(x_4(x_1 - 1) - x_1(x_4 - 1))} =$$

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)},$$

que coincideix amb ρ.

La raó doble α dels punts de la fotografia que representen el punt de 4 km (Q'), la posició del cotxe (C'), el punt d'1 km (U') i l'encreuament (E') es pot calcular prenent les mesures corresponents directament sobre la fotografia i fent les operacions algebraiques necessàries. D'altra banda, la raó doble $\rho(Q, C, U, E)$ (que ha de coincidir amb α) no és calculable directament a partir de la informació que tenim, ja que es desconeixen les distàncies (CE) i (CU). Ara bé, com que $(CU) = (CE) - 1$, podem fer

$$\alpha = \rho(Q, C, U, E) = \frac{(QU)(CE)}{(CU)(QE)} = \frac{3(CE)}{(CU)4} = \frac{3(CE)}{4((CE) - 1)},$$

de forma que

$$(CE) = \frac{4\alpha}{4\alpha - 3},$$

i ja tenim la dada que volíem saber. Fent aquests càlculs a partir del croquis sobre el qual hem plantejat el problema, a mi em surt que el cotxe es troba a uns 1375 m.