4.2 Demostracions errònies

A tots el problemes següents hi ha una errada. L'heu de trobar. Al final hi trobareu les explicacions dels errors comesos.

4.2.1. Prenem dos números iguals a i b.

$$
\begin{aligned}
a &= b, && \\
ab &= b^2 && \text{(multiplicant per } b\text{)},\\
a^2 - ab &= a^2 - b^2 && \text{(canviant de signe i sumant } a^2\text{)},\\
a(a-b) &= (a+b)(a-b) && \text{(traient factors comuns)},\\
a &= a+b && \text{(eliminant } a-b \text{ als dos costats)},\\
a &= 2a && \text{(recordem que } a=b\text{)},\\
1 &= 2 \text{ !!} && \text{(eliminant } a\text{)}.
\end{aligned}
$$

4.2.2.

$$
\begin{aligned}
4 - 10 &= 9 - 15, && \text{(claríssim)},\\
4 - 10 + \frac{25}{4} &= 9 - 15 + \frac{25}{4} && \text{(sumant } \tfrac{25}{4} \text{ als dos costats)},\\
\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 &= \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 && \text{(usant } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\text{)},\\
2 - \frac{5}{2} &= 3 - \frac{5}{2} && \text{(prenent arrels quadrades)},\\
2 &= 3 \text{ !!} && \text{(eliminat el } \tfrac{5}{2}\text{)}.
\end{aligned}
$$

4.2.3. És fàcil deduir que, si $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ amb $qs \neq 0$, aleshores, quan $q \neq s$ tenim

$$\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}.$$

Això és així perquè $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ si i només si $ps = rq$ i $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}$ si i només si $(p-r)q = p(q-s)$. Prenem ara x i y tals que

$$\frac{3x-5}{3x-1} = \frac{3y-8}{3y-4};$$

aleshores, usant el resultat anterior tenim

$$\frac{3x-5}{3x-1} = \frac{3y-8}{3y-4} = \frac{3x-5-(3y-8)}{3x-1-(3y-4)} = \frac{3x-3y+3}{3x-3y+3} = 1.$$

Si substituïm $x = 1$ tenim

$$\frac{-2}{2} = 1 \text{ !!}$$

4.2.4. Tenim que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} &< \frac{1}{4} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^3 &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 && \text{(equivalent a l'expressió anterior)} \\
\log\left(\frac{1}{2}\right)^3 &< \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 && \text{(el } \log \text{ és una funció creixent)} \\
3\log\left(\frac{1}{2}\right) &< 2\log\left(\frac{1}{2}\right) && \text{(usant } \log x^a = a\log x\text{)} \\
3 &< 2 \ !! && \text{(cancel·lant als dos costats } \log\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0\text{).}
\end{aligned}$$

4.2.5. Volem calcular la integral definida

$$\begin{aligned}
I(A) = \int_{2\cos A}^{1} \frac{a\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} &= \arcsin(ax)\Big|_{x=2\cos A}^{1} = \\
&= \arcsin a - \arcsin(2a\cos A).
\end{aligned}$$

Observeu que hem usat que $(\arcsin(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.

Si prenem $a = \sin A$, aleshores tenim que

$$\begin{aligned}
I(A) &= I(\arcsin A) = \\
&= \arcsin(\sin A) - \arcsin(2\sin A\cos A) = A - \arcsin(\sin 2A) = \\
&= A - 2A = -A,
\end{aligned}$$

on hem usat que arcsin és la funció inversa de sin, i que $\sin 2A = 2\sin A\cos A$.

Ara fixem $A = \frac{\pi}{3}$, $\cos A = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, i per tant

$$I\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_1^1 \frac{a\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = 0 \quad \text{(integrem en un interval de mida 0),}$$

però, per altra banda, $I\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ i, per tant,

$$0 = -\frac{\pi}{3} \ !!$$

4.2.6. Volem calcular una primitiva $f(\theta)$ de $\sin\theta\cos\theta$, és a dir una funció $f(\theta)$ tal que $f'(\theta) = \sin\theta\cos\theta$. Ja sabem que

$$f(\theta) = \int \sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Calcularem $f(\theta)$ de dues maneres diferents i igualarem el resultat

Forma 1:

$$f(\theta) = \int \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \int \sin\theta\frac{d\sin\theta}{d\theta}\,d\theta = \frac{\sin^2\theta}{2}.$$

Forma 2:

$$f(\theta) = \int \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\int \frac{d\cos\theta}{d\theta}\cos\theta\,d\theta = -\frac{\cos^2\theta}{2}.$$

Observeu que les dues expressions de $f(\theta)$ són correctes ja que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\cos^2\theta}{2}\right)=\sin\theta\cos\theta.$$

Igualant ambdues expressions,

$$f(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{2}=\frac{-\cos^2\theta}{2},$$

i per tant

$$\frac{\sin^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}=0.$$

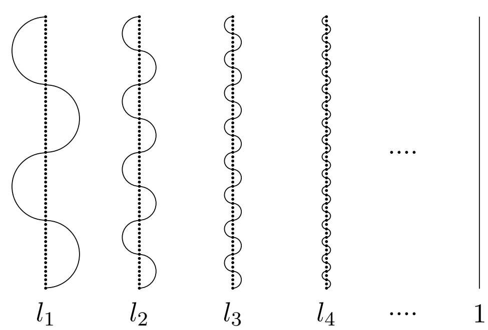
Com que $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, obtenim

$$\frac{1}{2}=0\ !!$$

4.2.7. Recordeu que $i=\sqrt{-1}$ i per tant $i^2=-1$. Aleshores, tenim que

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=ii=i^2=-1\ !!$$

4.2.8. Prenen les corbes formades per mitges circumferències, com a la figura següent, de manera que la línia puntejada tingui longitud 1. Anomenen l_n per $n=1,2,3,\dots$ les longituds de les corbes que anem obtenint. Com que les corbes s'aproximen al segment vertical de mida 1, les seves longituds l_n s'hauran d'aproximar a 1. Per exemple $l_1=2(2\pi\frac{1}{8})=\frac{\pi}{2}$. Es fàcil veure que $l_1=l_2=l_3=\cdots=l_n=\cdots=\frac{\pi}{2}$. Per tant, $\frac{\pi}{2}=1$!!



4.2.9. Volem sumar els infinits números

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\dots$$

Anomenem S la seva suma. D'una banda, tenim que

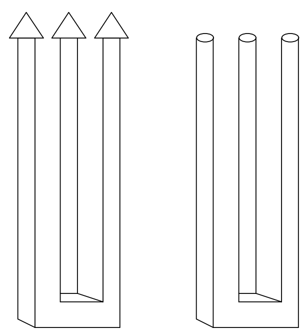
$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots>0,$$

ja que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ D'altra banda,

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}S. \end{aligned}$$

Com que $S = \frac{1}{2}S$, hem obtingut que $S = 0$; però, usant el primer mètode, teníem que $S > 0$. Aleshores,

$$0 = S > 0 \,!!$$



Dues figures impossibles.

4.2.1 Explicacions

1. A la igualtat $a(a-b) = (a+b)(a-b)$, tenim que $a - b = 0$, i 0 no es pot cancel·lar mai quan està multiplicant els dos costats d'una igualtat.

2. Si no es posa cap signe davant d'una arrel quadrada, s'entén que dóna un valor positiu. Així,
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$
Per tant,
$$\sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|2 - \frac{5}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

3. Aquí l'error ve d'usar que $\frac{p-r}{q-s} = \frac{p}{q}$ quan $q = s$. Observeu que si $x = 1$ de l'equació $\frac{3x-5}{3x-1} = \frac{3y-8}{3y-4}$, obtenim que $y = 2$, i per tant $\frac{3x-3y+3}{3x-3y+3} = \frac{0}{0}$.

4. Quan es té una desigualtat certa, si la multipliquem per un nombre negatiu, canvia, per exemple: $3 > 2$, si multipliquem per -2, $(-2)3 < (-2)(2)$. Per tant, a la demostració, quan cancel·lem $\log\left(\frac{1}{2}\right)$, que és negatiu, canviaria la desigualtat a $3 > 2$.

5. L'error ve del mal ús de la funció arcsin. Observeu que $\sin A = \sin(\pi - A) = \sin(2\pi + a) = \ldots$, i per tant la funció arcsin pot prendre molts valors. Així

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots \right\},$$

i per $A = \frac{\pi}{3}$ la igualtat certa és

$$0 = \int_1^1 \frac{a\, dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2}} = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) - \arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \\ = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Observeu que hauríem comès un error usant que $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

6. Recordeu que totes les funcions tals que derivades donen una funció concreta, com per exemple $\sin\theta\cos\theta$, s'obtenen sumant una constant K arbitrària a una primitiva donada. És a dir

$$\int \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} + K.$$

Per tant, si tenim dues primitives $\frac{\sin^2\theta}{2}$ i $-\frac{\cos^2\theta}{2}$ de la mateixa funció $\sin\theta\cos\theta$, no podem deduir que són iguals, sinó que restades donen una constant. Aquest és el cas, ja que

$$\frac{\sin^2\theta}{2} - \left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

7. Fer arrels quadrades de nombres complexos és delicat. Com sempre, tenen dues solucions (una canviada de signe respecte a l'altra), però no és clar com prendre els signes de manera que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

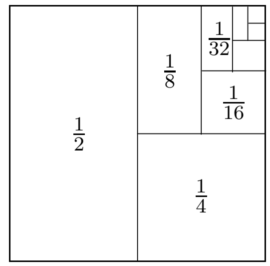
Amb d'altres paraules, podem dir que la igualtat anterior només és certa per a a i b reals positius.

8. L'error prové de suposar que el fet que unes corbes s'aproximin a una altra implica que les seves longituds també hauran d'aproximar la longitud de la corba límit. Això només és cert si s'aproximen a la corba límit tant les corbes com les seves rectes tangents.

9. Aquest és un error molt més delicat. El problema prové de saber què vol dir sumar infinits nombres. Per exemple, si volem sumar els infinits números:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$$

podem imaginar que aquests es corresponen a prendre les parts següents d'un quadrat de mida 1×1 : la meitat, la meitat de la meitat, i així successivament, obtenint rectangles d'àrea els números donats. Vegeu la figura següent:



Aleshores és clar

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1.$$

Observeu que la suma total és 1 i que el resultat que obtenim no depèn de l'ordre en què sumem els nombres. En canvi, quan es tracta de sumar infinits nombres positius i negatius el resultat pot dependre de l'ordre en què se sumen. Això ens pot sorprendre perquè la suma d'un nombre finit de nombres sí que és commutativa. Podeu veure aquest tema amb més detall, per exemple en el llibre de M. Spivak *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1975.

Si en lloc dels números considerats prenem els següents

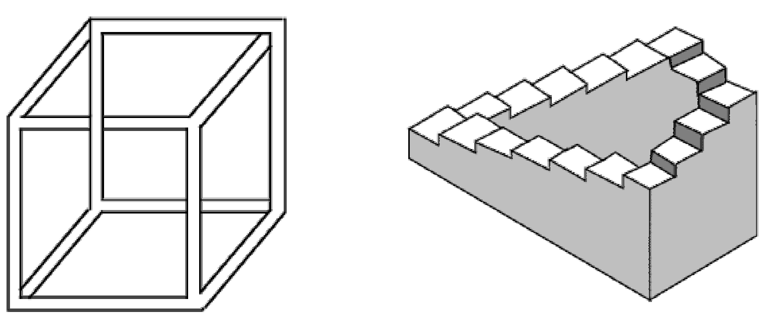
$$+1,-1,+1,-1,+1,-1,+1,-1,+1,\ldots$$

es pot veure el problema més clar. Si els sumem de dos en dos tenim

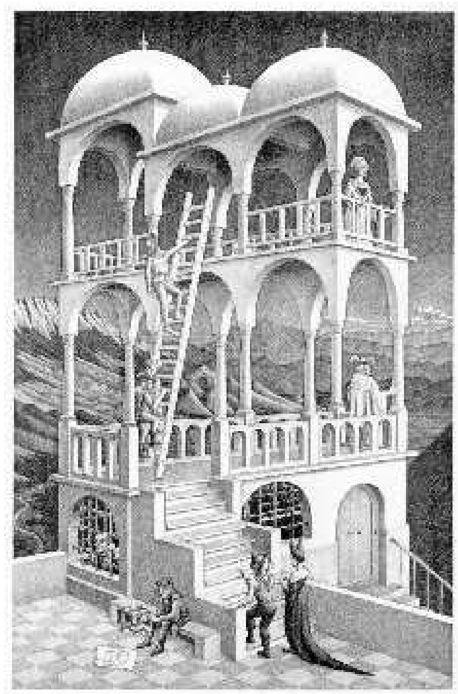
$$S=(+1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0.$$

D'altra banda, si separem el número 1

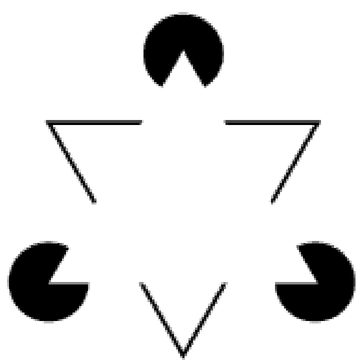
$$S=+1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1.$$



Dues figures impossibles més.



Reproducció d'una famosa obra del pintor holandès Mauritus Cornelis Escher (1898-1972).
El món de les matemàtiques ha inspirat Escher en moltes de les seves obres.



Hi ha realment un triangle blanc?