2.9 Solució d'equacions polinomials. Crèdits bancaris

La resolució d'equacions ha estat un dels problemes que ha fet evolucionar les matemàtiques al llarg de tota la seva història. Les equacions més senzilles

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

s'han pogut resoldre des de fa moltíssims anys. L'ús de la notació algebraica ens ha ajudat moltíssim. La solució de l'equació de dalt és $x = -b/a$.

La dificultat següent ens ve donada per a l'equació de segon grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

La seva solució es coneix des de més de quinze segles abans de Crist, i va ser trobada pels babilonis. Més tard, els grecs la van retrobar. Amb la notació moderna, és molt senzill veure com s'obté:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - c - \frac{b^2}{4a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

L'equació de tercer grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

va haver d'esperar fins al segle *XVI* per ser resolta. La paternitat de la seva solució va ser molt disputada. No entrarem aquí a explicar les baralles que hi va haver. Tres matemàtics italians hi van estar involucrats: Scipione de Ferro, Niccolò Tartaglia i Gerolamo Cardano.

Els passos per a la seva solució són els següents:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \\ x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0; \end{aligned}$$

prenem $x = y - \frac{b}{3a}$. Aleshores l'equació s'escriu com

$$y^3 + py + q = 0,$$

on

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Resoldrem doncs l'equació amb incògnita y, i a partir de les y obtindrem directament les x. Per això busquem solucions de la forma $y = u + v$. Substituint tenim

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \\ u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0. \end{aligned}$$

Per a resoldre aquesta última equació busquem u i v que satisfacin

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0, \\ 3uv + p = 0. \end{cases}$$

Clarament podem intentar resoldre el sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Com que $v^3 = -q - u^3$, tenim que

$$u^3(-q - u^3) = -\frac{p^3}{27},$$
$$(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Observem, a més, que v^3 ha de complir la mateixa equació de segon grau $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$. Usant les fórmules per a resoldre aquesta última equació arribem a

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Per tant, les solucions de

$$y^3 + py + q = 0$$

es poden trobar a partir de la fórmula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Aquesta darrera fórmula necessita una mica més d'explicació. Observeu que s'han de fer arrels cúbiques de nombres que poden ser reals o complexos (ho seran si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$). Recordeu que un número distint de zero té sempre tres arrels cúbiques. Per tant, la fórmula anterior dóna en general nou solucions. D'aquestes es pot veure que només tres poden ser solucions de l'equació original de grau 3. De fet s'han de prendre u i v tals que $uv = -p/3$.

La fórmula deduïda permet arribar a resultats curiosos. Per exemple, si prenem l'equació

$$y^3 - 6y - 40 = 0,$$

podem trobar per simple inspecció que $y = 4$ és una arrel. D'altra banda, tenim que les arrels són donades per la fórmula involucrant arrels quadrades i cúbiques. Així, es compleix que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Per a altres equacions la fórmula deduïda és l'única manera de trobar una solució exacta. Per exemple,

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} - \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}}$$

és una solució de l'equació $y^3 + 3y + 6 = 0$.

L'equació de quart grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

va ser resolta poc després de la de tercer grau per Ludovico Ferrari. Explicarem els passos per resoldre-la.

Dividint l'equació per a tenim

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Completant quadrats,

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{b^2}{4a^2}x^2 &= \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a}, \\ \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 &= \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

Tornem a intentar completar quadrats als dos costats afegint a les dues bandes $\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4}$. És a dir, busquem una y de manera que

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a} + \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4}$$

sigui un quadrat perfecte en x. En altres paraules, busquem y tal que existeixin expressions α i β que compleixin

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y\right)x^2 + \left(\frac{b}{2a}y - \frac{d}{a}\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{e}{a}\right) = (\alpha x + \beta)^2. \qquad (*)$$

Un cop trobades α i β tindríem que

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 + \left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)y + \frac{y^2}{4} &= (\alpha x + \beta)^2, \\ \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2}\right)^2 &= (\alpha x + \beta)^2, \end{aligned}$$

i, per tant, les solucions inicials s'obtindrien resolent les dues equacions de segon grau

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2} = \alpha x + \beta, \quad x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2} = -\alpha x - \beta, \qquad (**)$$

on y s'ha de buscar de forma que la relació $(*)$ es satisfaci. Ara bé, com s'assegura que una expressió

$$Ax^2 + Bx + C$$

és un quadrat perfecte? Doncs imposant que $B^2 - 4AC = 0$. En el nostre cas, tenim que y ha de ser tal que

$$\left(\frac{b}{2a}y - \frac{d}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - \frac{e}{a}\right) = 0. \qquad (***)$$

Calculant arribem que y ha de satisfer una equació de tercer grau, que ja sabem resoldre.

Resumint, per a resoldre l'equació de quart grau, hem de buscar una solució y, de l'equació de tercer grau $(***)$. A partir d'aquesta y podem buscar α i β que compleixin $(*)$. Un cop obtingudes α, β i y, podem resoldre les dues equacions de segon grau $(**)$ i obtindrem les solucions x de la primera equació.

A partir d'aquests dos èxits amb els graus 3 i 4, es va intentar resoldre les equacions de grau més elevat. Es va necessitar més de dos segles per a aconseguir deduir que era impossible donar fórmules que permetessin resoldre les equacions generals de grau n, $n \geq 5$ usant només un nombre finit de sumes, restes, multiplicacions, divisions i càlculs amb radicals. Els matemàtics que van demostrar aquest resultat van ser J.L. Lagrange (1736-1813), N. Abel (1802-1829) i E. Galois (1811-1832).

Podeu consultar els tres llibres d'A.D. Aleksandrov *et al.* *La matemática: su contenido, métodos y significado,* Alianza Universidad, 1973, en els quals trobareu desenvolupat aquest tema i molts altres temes matemàtics.

Com veureu a l'exemple que segueix, la resolució d'equacions polinomials de grau més gran que 4 apareix en problemes pràctics. Els mètodes que s'han desenvolupat permeten trobar les solucions amb el nombre de xifres decimals correctes que es desitja. Un dels mètodes més útils va ser el descobert per Isaac Newton.

Quota d'amortització d'un crèdit a interès fix

Suposem que una entitat financera ens deixa $D = 7\,000\,000$ ptes. a un interès mensual fix[7] del 0.5% ($r = 0.005$) i que podem pagar un màxim de $q = 90\,000$ ptes. al mes. Quant temps tardarem a cancel·lar el préstec?

En primer lloc recordem que un deute de c ptes. queda convertit en $c(1+r)^m$ ptes. després de m mesos. Tractem de relacionar totes les quantitats involucrades: el deute (D), l'interès mensual (r), la quota mensual (q) i el nombre de mesos (m). Una manera senzilla d'interpretar la situació és la següent.

Deute total: Si no paguéssim cap quota, la deuta inicial D es convertiria, després de m mesos, en

$$D(1+r)^m.$$

Cada cop que paguem una quota q podem pensar que aquesta queda dipositada a l'entitat i també produeix un interés r per cada un dels mesos restants; així:

La quota número 1 produeix un capital $q(1+r)^{m-1}$ (hi és $m-1$ mesos)
La quota número 2 produeix un capital $q(1+r)^{m-2}$ (hi és $m-2$ mesos)
$\vdots$
La quota número $m-1$ produeix un capital $q(1+r)$ (hi és 1 mes)
La quota número m produeix un capital q.

S'ha de complir la igualtat:

$$D(1+r)^m = q(1+r)^{m-1} + q(1+r)^{m-2} + \cdots + q(1+r) + q.$$

[7] Això normalment s'abreuja dient que l'interès anual és del 6%. Aquest interès no és ni de bon tros el famós T.A.E. El T.A.E. s'obté afegint a l'interès anual acumulat $6 \times (1.005)^{12}\% = 6.37\%$ les altres despeses per a obtenir el crèdit (comissions, estudi, etc.).

És a dir,

$$q = \frac{D(1+r)^m}{1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{m-1}}.$$

Per tal de trobar una fórmula més senzilla per a aquesta última expressió observem que si

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1},$$

aleshores

$$xS = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m.$$

Restant ambdues expressions tenim

$$(1-x)S = 1 - x^m,$$

d'on resulta

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} = \frac{1-x^m}{1-x}.$$

En el nostre cas, $x = 1 + r$, el denominador és

$$1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{m-1} = \frac{(1+r)^m - 1}{r},$$

i la relació final és

$$q = \frac{Dr(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}. \qquad (*)$$

Amb les dades concretes

$$90\,000 = \frac{7\,000\,000 \times 0.005 \times (1.005)^m}{(1.01)^m - 1} = \frac{35\,000 \times (1.005)^m}{(1.005)^m - 1}.$$

Operant

$$(1.005)^m = \frac{90\,000}{90\,000 - 35\,000} = \frac{18}{11}.$$

Aquesta última equació es pot resoldre fàcilment prenent logaritmes als dos costats:

$$\log(1.005)^m = \log\frac{18}{11},$$

d'on

$$m = \frac{\log 18/11}{\log 1.005} = 98.74\ldots$$

Per tant, necessitarem quasi 8 anys i 3 mesos per a liquidar el prèstec.

El problema invers, és més difícil. Suposem que llegim l'oferta següent: Podem pagar un objecte que costa 14 000 ptes. amb 12 quotes de 1 400 ptes. A quin interès mensual (r) ens ofereixen el crèdit?

Aplicant la fórmula $(*)$ obtinguda a l'apartat anterior obtenim que l'interès mensual r ha de complir

$$1400 = \frac{14000r(1+r)^{12}}{(1+r)^{12} - 1}.$$

Si anomenem x a $1 + r$, tenim

$$1400 = \frac{14000(x-1)x^{12}}{x^{12} - 1}.$$

Operant obtenim que x ha de complir (a més, ha d'estar entre 1 i 2)

$$14000x^{13} - 15400x^{12} + 1400 = 0,$$

o equivalentment $10x^{13} - 11x^{12} + 1$. Com ja hem comentat, la resolució d'aquesta equació de grau 13 en x no és possible de manera exacta. De tota manera, trobarem una solució de l'equació amb tants decimals correctes com vulguem utilitzant dos mètodes aproximats.

El primer d'ells, anomenat mètode de la bisecció, és el més senzill possible. Si anomenem

$$f(x) = 10x^{13} - 11x^{12} + 1,$$

observem que $f(1) = 0$, $f(1.01)$ és negatiu i $f(1.05)$ és positiu. Per tant una solució ha d'estar entre 1.01 i 1.05. Avaluant f a 1.03 deduïm que una solució esta a l'interval $[1.01, 1.03]$. Continuant aquest procés sis cops més arribem a que la nostra solució ha d'estar a $[1.02905, 1.02935]$.

El mètode Newton (vegeu també la secció 2.19) consisteix a considerar la successió recurrent

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{10x_n^{13} - 11x_n^{12} + 1}{130x_n^{12} - 132x_n^{11}}, \\ \\ x_0. \end{cases}$$

Aquest mètode té convergència quadràtica en molts casos i ens assegura que si la successió $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ s'acosta a un valor, aquest valor és una solució de $f(x) = 0$. Amb les nostres dades, si prenem x_0 com el punt intermedi de l'interval $[1.01, 1.05]$, obtenim que $x_0 = 1.03$, $x_1 = 1.029251963\ldots$, $x_2 = 1.029228563\ldots$, $x_3 = 1.029228540\ldots$, $x_4 = 1.029228540\ldots$ i per tant la solució és aproximadament 1.029228540. És a dir l'interès mensual és d'un 2.92%.

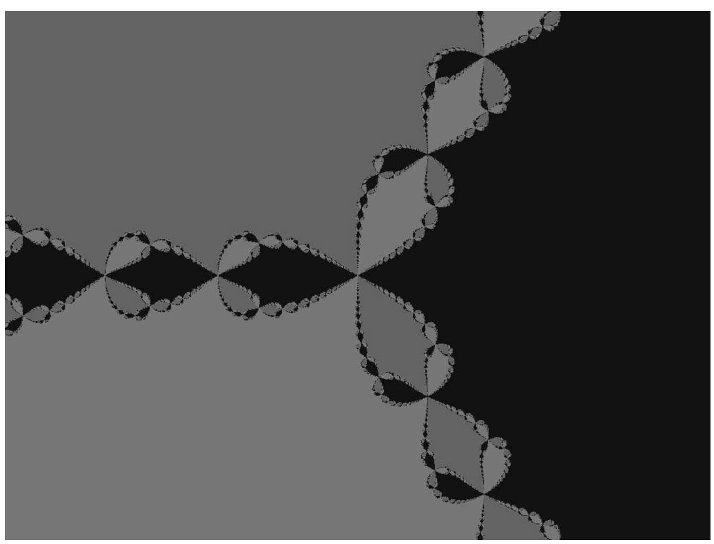

Figura obtinguda aplicant el mètode de Newton per a resoldre $z^3 - 1 = 0$, amb $z_0 \in \mathbb{C}$, i assignant a cada punt de $\mathbb{C}$ un color diferent en funció de la solució que trobem.