2.20 Models de poblacions

La dinàmica de poblacions intenta conèixer com evoluciona la població d'una o vàries espècies, en passar el temps.

Considerarem, en primer lloc, el cas d'una sola espècie. Si anomenem $p(t)$ a la població a l'instant t, la llei de Malthus formulada el 1798 ens diu que el canvi de població (mesurat per la derivada de $p(t)$) és proporcional a la població que hi ha. Aquesta llei, escrita sota formulació matemàtica (que en aquest cas pren la forma d'una equació diferencial), ens diu que

$$\frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t), \tag{$*$}$$

on a és una constant positiva de proporcionalitat. Si suposem que la població en un cert instant de temps t_0 és p_0, tenim la dada

$$p(t_0) = p_0. \tag{$**$}$$

No és difícil comprovar que la funció

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$$

és solució de $(*)$ i compleix $(**)$. Per tant, hem assolit el nostre objectiu de predir quina serà la població per a instants de temps futurs $t > t_0$.

Anem a aplicar aquest model a un cas concret: l'evolució del nombre d'habitants de la Terra. Segons els estudis fets als EUA durant 1960-70 es va estimar que la constant de proporcionalitat per a la població humana era $a = 0.02$. Sabem que el 1965 la població del món era d'uns 3340 milions de persones. Quan podríem dir que aquesta població es doblarà?

Usant la fórmula obtinguda per a $p(t)$, obtenim que

$$p(t) = 3.34 \times 10^9 e^{0.02(t-1965)}.$$

Volem calcular t per tal que $p(t) = 6.68 \times 10^9$. Això ens porta a l'equació per a t

$$e^{0.02(t-1965)} = 2,$$

és a dir,

$$t = 1965 + \frac{\ln 2}{0.02} \simeq 1965 + 34.7 \simeq 2000.$$

Per tant, la llei de Malthus preveu (a partir de les dades del 1965) una població d'uns 6680 milions de persones a la Terra per l'any 2000. Com haureu llegit als diaris, al final de 1999 la Terra ha arribat al seu habitant 6000 milions. No gaire lluny de les previsions teòriques!

De totes maneres, el model estudiat preveu que la població de la Terra creixerà indefinidament. Encara que només sigui per problemes d'espai físic, és clar que això no pot passar.

A 1836, Verhulst va proposar un model que ja tenia en compte la saturació i la limitació dels recursos. L'expressió matemàtica del model també és una equació diferencial:

$$\frac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t) - bp^2(t), \tag{$***$}$$

amb a i b constants positives.

Encara que amb una mica més de dificultat que per a la llei de Malthus, també en aquest cas es pot resoldre l'equació $(***)$ amb la condició $(**)$. La solució és

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

Un cop fixats els valors d'a, b, p_0 i t_0, la gràfica de la funció $p(t)$ s'anomena corba logística i és un bon model per a estudiar l'evolució de moltes poblacions. Per exemple, s'ha comprovat que la corba logística s'ajusta a la població que han tingut els EUA del 1790 al 1950, amb un error de menys d'un 3%.

Quan s'intenta modelar l'evolució de dues poblacions que interactuen, la situació és molt més complexa. Només comentarem un exemple que ha esdevingut clàssic: el model de Volterra per a sistemes depredador-presa.

El biòleg italià Umberto d'Ancona, va observar que la quantitat de selacis (taurons, rajades,etc.) capturats accidentalment en un port d'Itàlia del 1914 al 1923 seguia els percentatges següents:

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%	27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

Com que els selacis no són peixos comestibles, volia trobar un motiu de per què havia augmentat la seva proporció. Una diferència entre els anys amb més tant per cent de selacis podia ser el fet que s'havia produït durant aquells anys la Primera Guerra Mundial, però no trobava cap explicació convincent.

Va ser el matemàtic Vito Volterra qui va pensar a fer un model matemàtic de la situació:

- Va anomenar $p(t)$ a la quantitat de peixos comestibles, que a més eren preses dels selacis.
- Va anomenar $q(t)$ a la quantitat de selacis, que eren depredadors dels peixos comestibles.
- Va donar unes equacions diferencials semblants a les de Verhulst que donaven l'evolució de $p(t)$ i $q(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = p'(t) = ap(t) - bp(t)q(t), \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = q'(t) = -cq(t) + dp(t)q(t), \end{cases}$$

  on a, b, c, d són constant positives.

No podem entrar aquí en un estudi del sistema d'equacions diferencials de Volterra, però sí que voldríem dir que aquest estudi li va permetre donar una explicació del fenomen observat i que avui en dia es coneix com principi de Volterra. Aquest ens diu que si en un sistema depredador-presa des de fora del sistema augmentem la quantitat d'ambdues espècies (per exemple, amb menys pesca), aleshores la proporció de depredadors creix i la de preses decreix. També va donar el principi equivalent quan disminueix la quantitat d'ambdues espècies.

Aquest principi té importants aplicacions ecològiques. Una il·lustració és la següent: Als EUA hi havia un pugó dels cítrics (molt dolent per a les collites) que era menjat per un tipus de marieta. Quan es va descobrir el DDT, es va decidir fumigar les plantacions. Si els autors de la fumigació haguessin conegut el principi de Volterra no ho haurien fet, ja que podien haver pensat el següent:

- *Les marietes són els depredadors.*
- *Els pugons són les preses.*
- *El DDT mata marietes i pugons indiscriminadament; per tant, fa l'efecte d'augmentar la "pesca".*

Per conseqüent, l'efecte serà el contrari del que passa en disminuir la pesca, és a dir que els depredadors decreixeran i les preses (que són la plaga dolenta) creixeran.

L'efecte del DDT va ser desastrós, ja que va augmentar la plaga de pugons!

Tots els exemples d'aquesta secció han estat trets del llibre de M. Braun *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Ed. Iberoamérica, 1990.